CUPGE, Aix-Marseille Université

Première année, premier semestre 2015-16

Atelier Problème, 6 octobre 2015

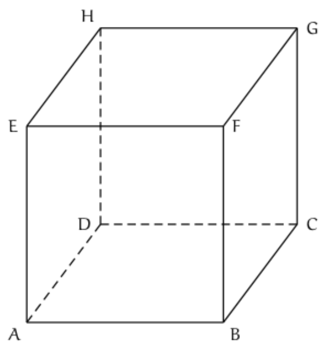
On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 représenté dans la figure ci-contre.

Dans tout ce problème, l'espace est rapporté au repère orthonormal $(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.

On note K le point de l'espace tel que

$$\overrightarrow{FK} = \frac{\overrightarrow{FD}}{3} \ .$$

Soit M un point du segment $[HG]$. On note $m = HM$ (m est donc un réel appartenant à l'intervalle $[0, 1]$).



Le cube $ABCDEFGH$ de côté 1

1. Montrer que le point K a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Placer le point K sur la figure.
2. Montrer que les droites (EK) et (DF) sont orthogonales.
3. Donner des équations cartésiennes pour ces droites.
4. Calculer la distance EK.
5. Montrer que, pour tout réel $m \in [0, 1]$, le volume du tétraèdre $EMFD$, mesuré en unités de volume, est égal à $\mathsf{Vol}(EMFD) = 1/6$.
6. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (MFD) est

$$(-1 + m)x + y - mz = 0 \ .$$

7. a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par E et perpendiculaire au plan (MFD). En déduire les coordonnées du projeté orthogonal E' du point E sur le plan (MFD) en fonction de m.

   b) Soit $d : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$d(m) = \frac{1}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}} \ .$$

   Montrer que $EE' = d(m)$. Donner l'interprétation géométrique du nombre $d(m)$.

   c) Déterminer la position de M sur le segment $[HG]$ pour laquelle la distance $d(m)$ est maximale.

   d) En déduire que lorsque la distance $d(m)$ est maximale, le point K est le projeté orthogonal de E sur le plan (MFD).
8. Calculer

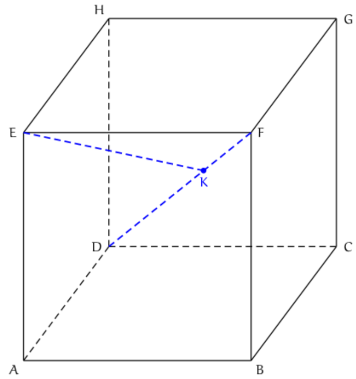
   a) la distance entre le point K et la droite (AB)

   b) la distance entre K et le plan (ABC).

Correction

Barème : 1 : 1pt ; 2 : 1pt ; 3 : 3pts ; 4 : 1pt ; 5 : 2 pts ; 6 : 2pts ; 7 : 2 pts par question ; 8 : 1 pt par question.

1. **Remarque :** faire attention au choix du repère (non conventionnel).
   Notons (x, y, z) les coordonnées du point K dans le repère $(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$. Le point D a pour coordonnées $D(0,0,0)$. D'autre part, puisque $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$, le point F a pour coordonnées $F(1,1,1)$.
   Par ailleurs, $\overrightarrow{FK} = \overrightarrow{FD}/3$ donne
   $$(x-1, y-1, z-1) = -\frac{1}{3}(1,1,1) \ ,$$
   d'où les coordonnées de K
   $$K\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \ .$$



Position du point K.

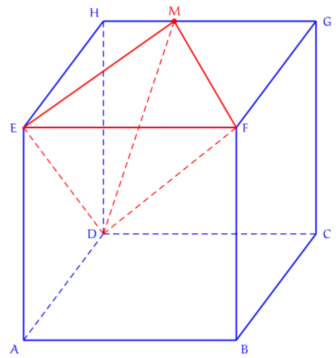
2. Dans le repère $(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$, le point E a pour coordonnées $E(1,0,1)$. Donc
   $$\overrightarrow{EK} = \left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right) \ ,$$
   et on a
   $$\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{DF} = \left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right) \cdot (1,1,1) = 0 \ .$$
   Les droites (EK) et (DF) sont donc orthogonales.
3. **Remarque :** on rappelle qu'une droite dans l'espace est caractérisée par **deux** équations cartésiennes non équivalentes (alors qu'une droite du plan n'a besoin que d'une équation cartésienne).
   Un vecteur directeur de (EK) est $\vec{d_1} = (1, -2, 1)$, et un vecteur directeur de (DF) est $\vec{d_2} = (1,1,1)$, et on a vu que $\vec{d_1} \perp \vec{d_2}$. Calculons $\vec{d_1} \wedge \vec{d_2} = (-3, 0, 3)$, on en déduit un vecteur normal à la fois à (EK) et (DF) : $\vec{v} = (1, 0, -1)$.
   Ecrivons maintenant :
   – $N(x,y,z) \in (EK)$ si et seulement si $\overrightarrow{EN} \perp \vec{v}$ et $\overrightarrow{EN} \perp \vec{d_2}$. Ceci équivaut aux deux équations
   $$\left\{\begin{array}{lcl} (x-1)-(z-1) & = & 0 \\ (x-1)+y+(z-1) & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x-z & = & 0 \\ x+y+z-2 & = & 0 \end{array}\right.$$
   – $N(x,y,z) \in (DF)$ si et seulement si $\overrightarrow{EN} \perp \vec{v}$ et $\overrightarrow{EN} \perp \vec{d_1}$. Ceci équivaut aux deux équations
   $$\left\{\begin{array}{lcl} (x-1)-(z-1) & = & 0 \\ (x-1)-2y+(z-1) & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x-z & = & 0 \\ x-2y+z-2 & = & 0 \end{array}\right.$$
4. Le calcul donne
   $$EK = \sqrt{\left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \ .$$
5. On observe que le projeté orthogonal de D sur le plan (EMF) est le point H. par conséquent,
   $$\mathsf{Vol}(EMFD) = \frac{1}{3} \times DH \times \mathsf{Aire}(EMF) \ .$$
   De plus, en notant M_0 le projeté orthogonal de M sur le segment $[EF]$, on a $MM_0 = EH$ et donc
   $$\mathsf{Aire}(EMF) = \frac{MM_0 \times EF}{2} = \frac{1}{2}\,\mathsf{U.A.} \ ,$$
   d'où
   $$\mathsf{Vol}(EMFD) = \frac{1}{6}\,\mathsf{U.V.}$$
   Remarque : on peut aussi utiliser directement la formule donnant le volume d'un tétraèdre engendré par 3 vecteurs comme la valeur absolue de leur produit mixte divisée par 6.

6. Dans le repère $(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$, le point D a pour coordonnées $(0,0,0)$, le point F a pour coordonnées $(1,1,1)$ et le point M a pour coordonnées $(0,m,1)$. Donc $\overrightarrow{DM} = (0,m,1)$ et $\overrightarrow{DF} = (1,1,1)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les points D, F et M ne sont pas alignés, et définissent ainsi un unique plan.
Pour obtenir une équation cartésienne de celui-ci, il suffit d'en calculer un vecteur normal. Calculons
$$\vec{n} = \overrightarrow{DF} \wedge \overrightarrow{DM} = (1,1,1) \wedge (0,m,1) = (1-m,-1,m) \ .$$
Donc un point $N(x,y,z)$ appartient au plan si et seulement si $\overrightarrow{DN} \cdot (1-m,-1,m) = 0$, soit
$$(1-m)x - y + mz = 0 \ ,$$
ce qui est l'équation cartésienne recherchée.
Remarque : on peut aussi procéder différemment, par exemple rappeler que par trois points non alignés il passe un et un seul plan, et vérifier que les coordonnées de D, F et M satiusfont l'équation cartésienne proposée, ce qui montre le résultat.

7. a) $\vec{n}$ est un vecteur directeur de cette droite, notons là (Δ). $N(x,y,z) \in (\Delta)$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{EN} = t\vec{n}$, soit
$$(x-1, y, z-1) = t(1-m,-1,m) \ ,$$
ce qui donne l'équation paramétrique
$$(\Delta) = \left\{ N(x,y,z) : \left\{ \begin{array}{ccccl} x & = & x(t) & = & 1+t(1-m) \\ y & = & y(t) & = & -t \\ z & = & z(t) & = & 1+mt \end{array} \right. \quad , \quad t \in \mathbb{R} \right\}$$
Soit E' le projeté orthogonal de E sur le plan. Comme $E' \in (\Delta)$ ses coordonnées sont de la forme $E'(1+t(1-m), -t, 1+mt)$. Comme $E' \in (MFD)$, on a aussi
$$(1-m)(1+t(1-m)) + t + m(1+mt) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t[(1-m)^2 + m^2 + 1] + [(1-m)+m] = 0 \ ,$$
d'où, puisque $(1-m)^2 + m^2 + 1 = 2m^2 - 2m + 2 \geq 1 > 0$,
$$t = \frac{-1}{2m^2 - 2m + 2} \ .$$
Donc, en insérant dans les expressions de x, y, z on obtient
$$E'\left(1 + \frac{m-1}{(m-1)^2+1+m^2}, \frac{1}{(m-1)^2+1+m^2}, 1 - \frac{m}{(m-1)^2+1+m^2}\right)$$

b) On a donc
$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{EE'} & = & \left(1 + \frac{m-1}{(m-1)^2+1+m^2} - 1, \frac{1}{(m-1)^2+1+m^2}, 1 - \frac{m}{(m-1)^2+1+m^2} - 1\right) \\ & = & \left(\frac{m-1}{(m-1)^2+1+m^2}, \frac{1}{(m-1)^2+1+m^2}, \frac{m}{(m-1)^2+1+m^2}\right) \end{array}$$
Par conséquent,
$$d(m) = EE' = \|\overrightarrow{EE'}\| = \frac{1}{\sqrt{(m-1)^2+1+m^2}} = \frac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}} \ .$$
$d(m)$ est la distance de E au plan (DFM).

c) La distance $d(m)$ est maximale si et seulement si $f(m) = m^2 - m + 1$ est minimal. Calculons
$$f'(m) = 2m - 1 \ .$$
f' s'annule pour $m = 1/2$. Comme par ailleurs
$$f''(1/2) = 2 > 0 \ .$$
le point $m = 1/2$ est donc un minimum de f.
Donc, la distance $d(m)$ est maximale si et seulement si M est le milieu du segment $[HG]$.



Position du point M.

d) Quand $m = 1/2$, une équation cartésienne du plan (MFD) est $x - 2y + z = 0$.
   - Montrons tout d'abord que $K \in (MFD)$: comme les coordonnées de K sont $(2/3, 2/3, 2/3)$ ceci est vérifié directement.
   - Par ailleurs, $\overrightarrow{EK} = (-1/3, 2/3, -1/3)$, et $\overrightarrow{EK}$ est donc proportionnel à $\vec{n}$, vecteur normal de (MFD).

   Quand $d(m)$ est maximale, K est donc le projeté orthogonal de E sur le plan (MFD).

8. a) $d(K, (AB))$ est donné par l'expression

$$d(K,(AB)) = \frac{\|\overrightarrow{AK} \wedge \overrightarrow{AE}\|}{\|\overrightarrow{AE}\|} = \|(-1/3, 2/3, 2/3) \wedge \overrightarrow{0,0,1}\| = \|(2/3, 1/3, 0)\| = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0.75$$

   b) Une équation cartésienne du plan (ABC) est $z = 0$. En utilisant la formule donnée en cours, on a

$$d(K,(ABC)) = \frac{2/3}{1} = \frac{2}{3} \ .$$