CUPGE, Aix-Marseille Université

Première année, premier semestre 2015-16

Atelier Problème, 17 décembre 2015

Soient a et b deux réels strictement positifs ; pour tout entier naturel non nul n, P_n désigne le polynôme défini par

$$P_n(X) = \frac{X^n(a-bX)^n}{n!} \; .$$

On notera aussi $P_n : x \in \mathbb{R} \to P_n(x)$ la fonction polynômiale associée.

1 Étude des polynômes P_n

Soit n un entier naturel non nul.

1. a) Quel est le degré de P_n ?
   b) Exprimer P_n sous forme de somme de termes de degrés croissants : $P_n(X) = \sum_k a_k X^k$.
   c) Que peut-on dire du polynôme dérivé k-ième $P_n^{(k)}$ de P_n pour tout entier $k \geq 2n+1$?
2. a) Préciser les racines de P_n et donner la multiplicité de chacune d'elles.
   b) Donner la valeur de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(a/b)$ pour tout entier $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.
3. Soit k un entier compris au sens large entre n et $2n$.
   a) Montrer que

$$P_n^{(k)}(X) = \frac{1}{n!} \sum_{p=k-n}^{n} \binom{k}{p} \frac{n!}{(n-p)!} \frac{n!}{(n-k+p)!} (-b)^{k-p} X^{n-p} (a-bX)^{n-k+p}$$

   b) En déduire les valeurs de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(a/b)$ en fonction de a, b, n et k.
   c) Vérifier que si a et b sont des entiers, il en est de même de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(a/b)$.

2 Étude de la fonction polynômiale P_n

1. Soit n un entier naturel non nul.
   a) Etudier la fonction P_n sur le segment $[0, a/b]$. Dresser son tableau de variations.

b) En déduire que P_n est positive et bornée sur le segment $[0, a/b]$ puis déterminer sa borne supérieure notée β_n :

$$\beta_n = \sup_{0 \leq x \leq a/b} P_n(x) \ .$$

2. Soit α un réel strictement positif. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_n = \frac{\alpha^n}{n!} \ , \qquad n \geq \ 1.$$

a) Montrer que la suite $(u_{n+1}/u_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

c) Que peut-on alors dire de la suite $(\beta_n)_{n\geq 1}$?

3. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers qui converge vers 0. Montrer que ses termes sont nuls à partir d'un certain rang.

3 De l'irrationalité de π

On se propose de montrer par l'absurde l'irrationalité de π ; on suppose donc qu'il existe deux entiers naturels non nuls, notés c et d, tels que $\pi = c/d$

Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$Q_n(x) = \frac{x^n(c-dx)^n}{n!} \ , \qquad I_n = \int_0^\pi Q_n(x) \sin x \, dx \ .$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{n!}\left(\frac{c^2}{4d}\right)^n \ ,$$

puis en déduire la limite de $(I_k)_{k\geq 1}$.

2. Montrer soigneusement que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \neq 0$.

3. En utilisant des intégrations par partie, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \sum_{k=n}^{2n} \left[Q_n^{(k)}\left(\frac{c}{d}\right) \cos\left(\frac{c}{d} + k\frac{\pi}{2} + \pi\right) - Q_n^{(k)}(0) \cos\left(k\frac{\pi}{2} + \pi\right) \right]$$

4. Justifier alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n est un entier.

5. Conclure au sujet de l'hypothèse

$$\pi = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q} \ .$$

Corrigé

1 Étude des polynômes P_n

1. a) $d^\circ(P_n) = 2n$.

   b) Ecrivons
$$(a-bX)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}(-b)^k X^k a^{n-k} \ ,$$
   donc
$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!\,(n-k)!} b^k a^{n-k}\, X^{k+n}$$

   c) la dérivée k-ième d'un polynôme de degré inférieur à k est nulle. Donc le polynôme dérivé k-ième $P_n^{(k)}$ de P_n est nul $k \geq 2n+1$.

2. a) Les racines de P_n sont 0 et a/b, ce sont des racines de multiplicité n.

   b) $P_n^{(k)}(0) = P_n^{(k)}(a/b) = 0$ pour tout entier $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, car 0 et a/b sont des racines de multiplicité n, ce sont donc des racines de toutes les dérivées de P_n jusqu'à l'ordre $n-1$.

3. Soit $n \leq k \leq 2n$.

   a) D'après la formule de Leibnitz,
$$P_n^{(k)}(X) = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} (X^n)^{(p)} \left((a-bX)^n\right)^{(k-p)} \ .$$
   Par ailleurs, on a $(X^n)' = nX^{n-1}$, $(X^n)'' = n(n-1)X^{n-2}$, et plus généralement
$$(X^n)^{(p)} = \begin{cases} n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)X^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!}X^{n-p} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$
   De même,
$$\left((a-bX)^n\right)^{(k-p)} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k+p)!}(-b)^p(a-bX)^{n-p} & \text{si } k-p \leq n \\ 0 & \text{si } k-p > n \end{cases}$$
   Tous les termes de la somme correspondant à des valeurs de p supérieures à n ou inférieures à $k-n$ sont nuls. Par conséquent on a bien
$$P_n^{(k)}(X) = \frac{1}{n!} \sum_{p=k-n}^{n} \binom{k}{p} \frac{n!}{(n-p)!} \frac{n!}{(n-k+p)!} (-b)^{k-p} X^{n-p} (a-bX)^{n-k+p}$$

   b) Dans le calcul de $P_n^{(k)}(0)$, seul le terme $p = n$ est non-nul. On a donc
$$P_n^{(k)}(0) = \binom{k}{n} \frac{n!}{(2n-k)!} (-b)^{k-n} a^{2n-k}$$

De même, dans le calcul de $P_n^{(k)}(a/b)$, seul le terme $p = k-n$ est non nul, et on obtient donc

$$P_n^{(k)}(a/b) = (-1)^n \binom{k}{k-n} \frac{n!}{(2n-k)!} a^{2n-k} b^{k-n}$$

c) Si a et b sont entiers, cette expression fait intervenir

— des puissances entières de a et b, qui sont donc des nombres entiers,

— un coefficient binômial, qui est entier

— le facteur $n!/(2n-k)!$, qui est un entier puisque $k \geq n$ donc $2n - k \leq n$.

Donc si a et b sont des entiers, il en est de même de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(a/b)$.

2 Étude de la fonction polynômiale P_n

1. Soit n un entier naturel non nul.

   a) Considérons la fonction P_n sur le segment $[0, a/b]$. Pour dresser son tableau de variations, calculons

   $$P_n'(x) = \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1}(a-bx)^{n-1}[a - 2bx] \ .$$

   Donc $P_n'(x)$ s'annule en $x = a/2b$. De plus,

   $$P_n\left(\frac{a}{2b}\right) = \frac{1}{n!}\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n = \beta_n$$

t	0		$a/2b$		a/b
$P_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$P_n(x)$	0	$\nearrow$	β_n	$\searrow$	0

Table 1 – Tableau de variations de la fonction polynôme P_n.

   La fonction P_n est continue, bornée, et atteint son maximum en $x = a/2b$.

   b) La fonction P_n est positive, bornée sur le segment $[0, a/b]$. Elle atteint sa borne supérieure β_n (voir ci-dessus) en $a/2b$.

2. Soit α un réel strictement positif. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

   $$u_n = \frac{\alpha^n}{n!} \ , \qquad n \geq \ 1.$$

   a) On voit facilement que

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\alpha}{n+1} \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty \ .$$

   b) On peut voir que $u_n = \alpha u_{n-1}/n = \alpha u_0/n!$. Il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n/u_{n-1} \leq 1/2$. Donc

   $$u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdots \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} u_{n_0} \leq 2^{-n} 2^{n_0} u_{n_0} \to 0 \qquad \text{quand} \quad n \to \infty \ .$$

c) On voit que $\beta_n = u_n$ avec $\alpha = a^2/4b$, donc $\beta_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

3. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers qui converge vers 0. Alors il existe N tel que $|x_n| < 1/4$ pour tout $n \geq N$. Dans ces conditions, pour tous $m, n > N$, on a $|x_n - x_m| < 1/2$ et comme il s'agit d'une suite d'entiers, $x_n = x_m$ sont donc nuls.

3 De l'irrationalité de π

On se propose de montrer par l'absurde l'irrationalité de π ; on suppose donc qu'il existe deux entiers naturels non nuls, notés c et d, tels que $\pi = c/d$

Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$Q_n(x) = \frac{x^n(c-dx)^n}{n!} \ , \qquad I_n = \int_0^\pi Q_n(x) \sin x \, dx \ .$$

1. D'après ce qui précède,

$$I_n \leq \int_0^\pi |Q_n(x)|\,|\sin(x)|\,dx \leq \frac{\pi}{n!}\left(\frac{c^2}{4d}\right)^n \ .$$

On en déduit que

$$\lim_{k\to\infty} I_k = 0 \ .$$

2. La fonction $x \to Q_n(x)\sin x$ est continue positive sur $[0,\pi]$ et non nulle donc son intégrale est aussi non nulle.

3. Calculons maintenant

$$\begin{aligned} I_n &= -\int_0^\pi Q_n(x)\cos'(x)dx \\ &= -[Q_n(x)\cos(x)]_0^\pi + \int_0^\pi Q_n'(x)\cos(x)dx \\ &= [Q_n(x)\cos(x+\pi)]_0^\pi + [Q_n'(x)\cos(x+3\pi/2)]_0^\pi - \int_0^\pi Q_n''(x)\sin(x)dx \end{aligned}$$

Plus généralement, on a

$$\int_0^\pi Q_n^{(k)}(x)\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)\,dx = \left[Q^{(k)}(x)\cos\left(x+\pi+k\frac{\pi}{2}\right)\right]_0^\pi + \int_0^\pi Q_n^{(k+1)}(x)\sin\left(x+(k+1)\frac{\pi}{2}\right)\,dx \ ,$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{k=0}^{2n}\left[Q^{(k)}(x)\cos\left(x+\pi+k\frac{\pi}{2}\right)\right]_0^\pi + \int_0^\pi Q^{(2n+1)}(x)\sin\left(x+(2n+2)\frac{\pi}{2}\right)\,dx \\ &= \sum_{k=n}^{2n}\left[Q^{(k)}(x)\cos\left(x+\pi+k\frac{\pi}{2}\right)\right]_0^\pi \\ &= \left[Q_n^{(k)}\left(\frac{c}{d}\right)\cos\left(\frac{c}{d}+k\frac{\pi}{2}+\pi\right) - Q_n^{(k)}(0)\cos\left(k\frac{\pi}{2}+\pi\right)\right] \end{aligned}$$

4. On en déduit que comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n^{(k)}(0) = Q_n^{(k)}(c/d)$ est entier pour tout $n \leq k \leq 2n$, I_n est un entier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et est non nul d'après la question 2.

5. D'après les questions précédentes, $I_n \to 0$ quand $n \to \infty$, et comme il s'agit d'une suite d'entiers $I_n = 0$ à partir d'un certain rang N. Ceci est en contradiction avec la question 2. On en déduit que π ne peut pas être rationnel.