CUPGE, Aix-Marseille Université

Première année, premier semestre 2015-16

Devoir Surveillé 1, 20 octobre 2015

Durée : 2 heures

Documents, calculatrice et téléphone non autorisés. Prêter la plus grande attention à la rédaction, notamment en explicitant (succintement) les propriétés et méthodes utilisées.

Exercice 1 (Nombres complexes)

1. Écrire sous la forme $a + ib$ les nombres complexes
$$(1+i)^2 , \qquad (1+i)^4 , \qquad (1+i)^8$$
2. En utilisant la formule donnant la somme d'une série géométrique $\sum_{n=0}^{N} r^n$, en déduire
$$1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^7$$
3. Donner les formes polaires de
$$z_1 = 1 - i , \quad z_2 = \sqrt{3} + i ,$$
et les formes polaires et cartésiennes de $z_1.z_2$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 2 (Géométrie dans le plan)

On considère les droites (D) et (D') définies ci-dessous
$$(D) = \{M(x,y) : x + y - 2 = 0\} , \qquad (D') = \left\{ M(x,y) : \left\{ \begin{array}{lllll} x & = & x(t) & = & t+1 \\ y & = & y(t) & = & 2t-1 \end{array} \right. , \quad t \in \mathbb{R} \right\}$$

1. Donner une équation paramétrique pour (D) et une équation cartésienne pour (D').
2. Vérifier que (D) et (D') sont sécantes, et calculer l'angle aigü α entre ces deux droites (on pourra se contenter d'en donner le cosinus).
3. Soit $M(x,y)$ un point du plan. Calculer les projetés orthogonaux P et P' de M sur (D) et (D') respectivement.
4. Calculer l'aire du triangle MPP' dans le cas du point $M(0,0)$.

Exercice 3 (Géométrie dans l'espace)

Soient $A(1,0,1)$, $B(-1,2,1)$ et $C(1,0,-1)$ trois points de l'espace.

1. Donner une équation cartésienne du plan passant par A, B et C.
2. Quelle est la nature géométrique de l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BC} = \vec{0}$? en donner une équation paramétrique.
3. Quelle est la nature géométrique de l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$? en donner une équation cartésienne.

Exercice 4 (Transformations du plan)

Soit $\Omega(1,1)$ un point du plan.

1. Donner l'expression (en coordonnées cartésiennes et en complexe) de l'homothétie h de centre Ω et de rapport 2, et de la rotation r de centre Ω et d'angle $\pi/4$.
2. Donner l'expression complexe de la similitude directe s de centre Ω, de rapport 2 et d'angle $\pi/4$.
3. Calculer l'image par s du point $M(2,2)$.

Correction de l'exercice 1 (Nombres complexes)

1. Écrire sous la forme $a + ib$ les nombres complexes

$$(1+i)^2 = 2i \ , \quad (1+i)^3 = 2i(1+i) = 2(-1+i) \ , \quad (1+i)^4 = -4 \ , \quad (1+i)^8 = 16 \ .$$

2. Calculons

$$1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^7 = \sum_{n=0}^{7} (1+i)^n = \frac{1-(1+i)^8}{1-(1+i)} = \frac{-15}{-i} = -15i$$

3. On a

$$z_1 = 1 - i = \sqrt{2} e^{-i\pi/4} \ , \quad z_2 = \sqrt{3} + i = 2e^{i\pi/6} \ .$$

Donc

$$z_1.z_2 = 2\sqrt{2} \exp\left\{ i\pi \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4} \right) \right\} = 2\sqrt{2} \exp\left\{ -i\frac{\pi}{12} \right\} = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12} \right) - i \sin\left(\frac{\pi}{12} \right) \right) \ .$$

Par ailleurs, on a

$$z_1.z_2 = (1-i)(\sqrt{3}+i) = (1+\sqrt{3}) + i(1-\sqrt{3}) = 2\sqrt{2} \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right)$$

on en déduit donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \ , \qquad \sin\left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \ .$$

Correction de l'exercice 2 (Géométrie dans le plan)

On considère les droites (D) et (D') définies ci-dessous

$$(D) = \{ M(x,y) : x + y - 2 = 0 \} \ , \qquad (D') = \left\{ M(x,y) : \left\{ \begin{array}{lllll} x & = & x(t) & = & t+1 \\ y & = & y(t) & = & 2t-1 \end{array} \right. \ , \quad t \in \mathbb{R} \right\}$$

1. Un vecteur normal de (D) est $\vec{n} = (1,1)$. On peut en déduire un vecteur directeur $\vec{d} = (1,-1)$, et écrire que (D) est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{d}$, où t parcourt l'axe réel et où A est un point quelconque de (D). Prenons par exemple $A(2,0)$, cette dernière équation s'écrit $(x-2,y) = t(1,-1)$, soit l'équation paramétrique

$$x = x(t) = t + 2 \ , \qquad y = y(t) = -t \ , \qquad t \in \mathbb{R} \ . \tag{D}$$

Un vecteur directeur de (D') est $\vec{d'} = (1,2)$, on en déduit un vecteur normal $\vec{n}' = (2,-1)$. Soit $B \in (D')$, par exemple $B(1,-1)$. (D') est l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan tels que $\overrightarrow{BM} \cdot \vec{n}' = 0$, ce qui s'écrit $2(x-1) - (y+1) = 0$, d'où l'équation cartésienne

$$2x - y - 3 = 0 \ . \tag{D'}$$

2. (D) et (D') sont bien sécantes puisque leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires. L'angle α s'obtient en calculant le produit scalaire entre les vecteurs directeurs, soit

$$\vec{d} \cdot \vec{d'} = \|\vec{d}\|.\|\vec{d'}\|. \cos \alpha$$

Le calcul donne $\vec{d} \cdot \vec{d'} = -1$, $\|\vec{d}\| = \sqrt{2}$ et $\|\vec{d'}\| = \sqrt{5}$. On a donc

$$\cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{10}} \ .$$

3. Soit $M(x,y)$ un point du plan, soit $P(x_0,y_0)$ son projeté orthogonal sur (D). Comme $H \in (D)$, on a $y_0 = 2 - x_0$. Par ailleurs, l'orthogonalité donne $\overrightarrow{MP} \cdot \vec{d} = 0$, ce qui s'écrit $(x_0 - x, 2 - x_0 - y) \cdot (1, -1) = 0$, donc $2x_0 - x - 2 + y = 0$, et donc $x_0 = (x - y + 2)/2$. On en déduit $y_0 = 2 - x_0 = (-x + y + 2)/2$:
$$(x_0, y_0) = \left(\frac{x - y + 2}{2}, \frac{-x + y + 2}{2}\right) .$$
De même, soit $P'(x_0', y_0')$ le projeté orthogonal de M sur (D'). Comme $H' \in (D')$ on a $y_0' = 2x_0' - 3$. En écrivant $\overrightarrow{MP'} \cdot \vec{d'} = 0$, on obtient $(x_0' - x, 2x_0' - 3 - y) \cdot (1, 2) = 0$, soit $5x_0' - x - 2y - 6 = 0$, d'où $x_0' = (x + 2y + 6)/5$. De là on tire $y_0' = 2x_0' - 3 = (2x + 4y - 3)/5$:
$$(x_0', y_0') = \left(\frac{x + 2y + 6}{5}, \frac{2x + 4y - 3}{5}\right) .$$

4. L'aire du triangle MPP' s'obtient en calculant le déterminant $\mathsf{det}(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MP'})$. On a
$$\overrightarrow{MP} = (x_0 - x, y_0 - y) = \left(\frac{-x - y + 2}{2}, \frac{-x - y + 2}{2}\right)$$
et
$$\overrightarrow{MP'} = (x_0' - x, y_0' - y) = \left(\frac{-4x + 2y + 6}{5}, \frac{2x - y - 3}{5}\right) .$$
dans le cas du point $M(0,0)$, on a
$$\overrightarrow{MP} = (1,1) \ , \qquad \overrightarrow{MP'} = \left(\frac{6}{5}, \frac{-3}{5}\right) = \frac{-3}{5}(2, -1) \ ,$$
d'où
$$\mathsf{Aire}(MPP') = \frac{1}{2}\,\frac{3}{5}\,|\mathsf{det}((1,1),(2,-1))| = \frac{9}{10} .$$

Correction de l'exercice 3 (Géométrie dans l'espace)

Soient $A(1,0,1)$, $B(-1,2,1)$ et $C(1,0,-1)$ trois points de l'espace.

1. Pour obtenir une équation cartésienne du plan passant par A, B et C, il suffit de calculer un vecteur normal. Soient donc $\overrightarrow{AB} = (-2,2,0)$ et $\overrightarrow{AC} = (0,0,-2)$, et calculons
$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-4, -4, 0) .$$
On peut donc prendre $\vec{n} = (1,1,0)$, et écrire que $M(x,y,z)$ appartient au plan si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, soit $(x-1, y, z-1) \cdot (1,1,0) = 0$, d'où l'équation cartésienne
$$x + y - 1 = 0 .$$

2. On sait que le produit vectoriel de deux vecteurs est le vecteur nul si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires. Donc l'ensemble recherché est la droite passant par A parallèle à (BC). Comme $\overrightarrow{BC} = (2,-2,-2)$ on peut prendre $\vec{d} = (1,-1,-1)$ comme vecteur directeur. On écrit donc la droite comme l'ensemble des $M(x,y,z)$ tels que $\overrightarrow{AM} = (x-1, y, z-1) = t\vec{d}$, d'où l'équation paramétrique
$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & x(t) & = & t+1 \\ y & = & y(t) & = & -t \\ z & = & z(t) & = & -t+1 \end{array}\right. \quad , \qquad t \in \mathbb{R} .$$

3. On sait que le produit scalaire de deux vecteurs est nul si et seulement si les deux vecteurs sont orthogonaux. L'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ est donc le plan perpendiculaire à $\overrightarrow{BC}$ et passant par A. Une équation cartésienne peut s'obtenir à partir d'un vecteur normal. Le calcul ci-dessus suggère $\vec{n} = (1,-1,-1)$. $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}$ s'écrit $x - 1 - y - z + 1 = 0$, soit
$$x - y - z = 0 .$$

Correction de l'exercice 4 (Transformations du plan)

Soit $\Omega(1,1)$ un point du plan.

1. On considère l'homothétie h de centre Ω Elle s'exprime en coordonnées cartésiennes sous la forme

$$M(x,y) \to M'(x',y') = h(M) : \qquad \left\{ \begin{array}{lllll} x' & = & 1+2(x-1) & = & 2x-1 \\ y' & = & 1+2(y-1) & = & 2y-1 \end{array} \right.$$

et en complexe comme

$$z = z_M \to z' = z_{M'} = (1+i) + 2(z-1-i) = 2z-1-i \; .$$

On considère la rotation r de centre Ω et d'angle $\pi/4$. Elle s'exprime en coordonnées cartésiennes sous la forme

$$M(x,y) \to M'(x',y') = h(M) : \qquad \left\{ \begin{array}{lllll} x' & = & 1+\frac{1}{\sqrt{2}}(x-1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(y-1) & = & \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} + 1 \\ y' & = & 1+\frac{1}{\sqrt{2}}(x-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(y-1) & = & \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} + 1 - \sqrt{2} \end{array} \right.$$

et en complexe comme

$$z = z_M \to z' = z_{M'} = (1+i) + e^{i\pi/4}(z-1-i) \; .$$

2. $s = h \circ r$ associe à tout $M(x,y)$ d'affixe z le point M' d'affixe z' tel que

$$z = z_M \to z' = z_{M'} = (1+i) + 2e^{i\pi/4}(z-1-i) = 2e^{i\pi/4}z + (1+i)\left[1-2e^{i\pi/4}\right] \; .$$

En réel, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{lllll} x' & = & 1+\sqrt{2}(x-1) - \sqrt{2}(y-1) & = & 1 + x\sqrt{2} - y\sqrt{2} + 1 \\ y' & = & 1+\sqrt{2}(x-1) + \sqrt{2}(y-1) & = & x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + 1 - 2\sqrt{2} \end{array} \right.$$

3. Si $M(2,2)$, on a

$$z' = (1+i) + \sqrt{2}(1+i)(2+2i-1-i) = (1+i)[1+\sqrt{2}(1+i)] = 1 + i[1+2\sqrt{2}]$$

Donc son image est $M'(1, 1+2\sqrt{2})$