CUPGE, Aix-Marseille Université

Première année, premier semestre 2015-16

Devoir Surveillé 2, 10 Décembre 2015

Durée : 2 heures

Documents, calculatrice et téléphone non autorisés. Prêter la plus grande attention à la rédaction, notamment en explicitant (succintement) les propriétés et méthodes utilisées.

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Enoncer le plus précisément possible le théorème de Bézout (donnant l'existence des polynômes de Bézout).
2. Donner la formule du binôme de Newton.
3. Donner la formule de Moivre.

Exercice 2 (Plan complexe)

1. On considère les points A et B d'affixes respectives i et 1. Soit M un point du plan d'affixe z distinct de A. On pose
$$Z = \frac{1-z}{i-z}$$
   a) Déterminer l'ensemble E des points M tels que Z soit réel, et donner la nature géométrique de E.
   b) Déterminer l'ensemble F des points M tels que Z soit imaginaire pur, et en donner la nature géométrique.
2. Soit la transformation du plan définie dans le plan complexe par $z \in \mathbb{C} \to Z = z^2 + 2z - 3$.
   a) Soit E l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tels que Z soit réel. Montrer que $Z - \overline{Z} = (z - \overline{z})(z + \overline{z} + 2)$. En déduire que E est l'union de deux droites (D_1) et (D_2) qu'on déterminera.
   b) Déterminer l'image de E par la similitude directe de centre $O(0,0)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\pi/4$.

Exercice 3 (PGCD et Bézout)

Soient $A, B \in \mathbb{C}[X]$ définis par
$$A(X) = X^4 - X^3 - 4X^2 - X + 2\ , \qquad B(X) = X^2 + 2X + 1\ .$$

1. Calculer le PGCD unitaire P de A et B.
2. Calculer les polynômes a et b tels que $A = aP$ et $B = bP$. En déduire un PPCM de A et B.
3. Calculer les polynômes de Bézout U et V de A et B. En déduire toutes les solutions $C, D \in \mathbb{C}[X]$ de l'équation
$$AC + BD = P\ .$$

Exercice 4 (Résolution d'équations sur $\mathbb{C}$)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2 - (1+i)z + 5i = 0\ .$$
2. Calculer les racines cinquièmes de $z = -1 + i\sqrt{3}$
3. a) Montrer que
$$\cos(4\theta) = 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1\ .$$
   b) Utiliser cette égalité pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1 = 0\ .$$
   c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$8X^4 - 8X^2 + 1 = 0\ ,$$
   et en déduire la valeur de $\cos(\pi/8)$.

Corrigé

Correction de l'exercice 1 (Questions de cours)

1. **Théorème de Bézout :** soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes et P un PGCD de A et B. Alors il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $d^\circ(U) < d^\circ(B)$ et $d^\circ(V) < d^\circ(A)$ et
$$AU + BV = P \ .$$
2. **Formule du binôme :** Soient $x, y \in \mathbb{C}$ et $N \in \mathbb{N}$. Alors
$$(x+y)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} x^n y^{N-n} \ .$$
3. **Formule de Moivre :** pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx) \ .$$

Correction de l'exercice 2 (Plan complexe)

1. On considère les points A et B d'affixes respectives i et 1. Soit M un point du plan d'affixe z distinct de A. On pose
$$Z = \frac{1-z}{i-z} = \frac{(1-z)(-i-\overline{z})}{(i-z)(-i-\overline{z})} = \frac{|z|^2 + iz - \overline{z} - i}{|z|^2 + i(z-\overline{z}) + 1} = \frac{|z|^2 + iz - \overline{z} - i}{|z|^2 - 2\,\mathfrak{Im}(z) + 1}$$
En posant $z = x + iy$ on a
$$Z = \frac{x^2 + y^2 + ix - y - x + iy - i}{x^2 + y^2 - 2y + 1} = \frac{(x^2 + y^2 - x - y) + i(x + y - 1)}{x^2 + y^2 - 2y + 1}$$
   a) Z est réel si et seulement si le numérateur de l'expression ci-dessus l'est, soit
$$x + y - 1 = 0 \ .$$
   L'ensemble E recherché est donc la droite admettant l'équation ci-dessus comme équation cartésienne.

   b) Z est imaginaire pur si et seulement si
$$x^2 + y^2 - x - y = 0 \ ,$$
   ce qui est l'équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(1/2, 1/2)$ et de rayon $\sqrt{2}/2$.
2. Soit $Z = z^2 + 2z - 3$.

   a) Ecrivons
$$Z - \overline{Z} = z^2 - \overline{z}^2 + 2(z - \overline{z}) = (z - \overline{z})(z + \overline{z} + 2) \ .$$
   Soit E l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan complexe d'affixe $z = x + iy$ tels que Z soit réel. $M \in E$ si et seulement si $z - \overline{z} = 0$ ou $z + \overline{z} = -2$. Ceci correspond à l'union des droites d'équations cartésiennes respectives
$$(D_1) : \ y = 0 \ , \qquad (D_2) : \ x = -1 \ .$$
   b) La similitude en question est donnée par
$$z \to z' = \sqrt{2} e^{i\pi/4} z \ .$$
   Les points de (D_1) ont pour affixe $z = x$, d'où $z' = x' + iy' = x\sqrt{2}\frac{1+i}{\sqrt{2}} = x(1+i)$, d'où l'image de (D_1) est la droite d'équation $y' = x'$.
   Les points de (D_2) ont pour affixe $z = 1 + iy$, d'où $z' = x' + iy' = (1+iy)\sqrt{2}\frac{1+i}{\sqrt{2}} = (1+iy)(1+i) = (1-y) + i(1+y)$, l'image de (D_2) est donc une droite d'équation cartésienne $x' + y' = 2$.

Correction de l'exercice 3 (PGCD et Bézout)

Soient $A, B \in \mathbb{C}[X]$ définis par

$$A(X) = X^4 - X^3 - 4X^2 - X + 2 \ , \qquad B(X) = X^2 + 2X + 1$$

1. Calculons le PGCD unitaire P de A et B : la division euclidienne donne

$$A = Q_0 B + R_1 \ , \quad Q_0(X) = X^2 - 3X + 1 \ , \quad R_1(X) = 1 \ .$$

donc A et B sont premiers entre eux, le PGCD unitaire de A et B est

$$P(X) = 1 \ .$$

2. On a $a = a$ et $B = b$. On peut en déduire un PPCM p de A et B, grâce à la formule

$$p = AB/P = abP = aB \ , \qquad p(X) = X^6 + X^5 - 5X^4 - 10X^3 - 4X^2 + 3X + 2 \ .$$

3. Calculons les polynômes de Bézout U et V de A et B. D'après ce qui précède, on a

$$R_1 = A - Q_0 B \ ,$$

on peut donc écrire

$$P = AU_0 + BV_0 \ ,$$

avec

$$U_0(X) = 1 \ , \qquad V_0(X) = -Q_0(X) = -X^2 + 3X - 1$$

Soient U, V, U', V' tels que $AU + BV = P$ et $AU' + BV' = P$. Alors on a $A(U - U') + B(V - V') = P$, et A et A sont premiers entre eux. On a donc $A(U - U') = -B(V - V')$, d'où $U - U'$ est multiple de B : $U - U' = BQ$, d'où $V - V' = -AQ$. Les solutions sont donc de la forme

$$U = U_0 + BQ \ , \qquad V = V_0 - AQ \ , \qquad Q \in \mathbb{K}[X] \ .$$

Correction de l'exercice 4 (Résolution d'équations sur $\mathbb{C}$)

1. Dans $\mathbb{C}$ on considère l'équation

$$z^2 - (1+i)z + 5i = 0 \ .$$

Le discriminant vaut

$$\Delta = (1+i)^2 - 20i = -18i = 18e^{3i\pi/2}$$

une racine carrée en est

$$\delta = 3\sqrt{2}e^{3i\pi/4} = 3(-1+i) \ .$$

les solutions sont donc

$$z_1 = \frac{(1+i) + 3(-1+i)}{2} = -1 + 2i \ , \qquad z_2 = \frac{(1+i) - 3(-1+i)}{2} = 2 - i \ .$$

2. On a

$$z = -1 + i\sqrt{3} = 2e^{2i\pi/3} \ .$$

Soit $\xi = |\xi| e^{i\theta}$ tel que $\xi^5 = z$. On a alors

$$|\xi| = 2^{1/5} \ , \qquad \theta = \frac{2\pi}{15} \left[\mathsf{mod}\, \frac{2\pi}{5} \right]$$

les racines sont donc

$$2^{1/5}e^{2i\pi/15} \ , \quad 2^{1/5}e^{8i\pi/15} \ , \quad 2^{1/5}e^{14i\pi/15} \ , \quad 2^{1/5}e^{20i\pi/15} \ , \quad 2^{1/5}e^{26i\pi/15}$$

3. a) La formule de Moivre donne

$$\begin{aligned}
\cos(4\theta) &= \mathfrak{Re}\,(\cos\theta + i\sin\theta)^4 \\
&= \mathfrak{Re}\left(\sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} \cos^k\theta (i)^{n-k} \sin^{n_k}\theta\right) \\
&= \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta \\
&= \cos^4\theta - 6\cos^2(1-\cos^2\theta) + (1-\cos^2\theta)^2 \\
&= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1
\end{aligned}$$

b) De là on déduit que

$$8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1 = 0$$

si et seulement si $\cos(4\theta) = 0$, soit 4θ est multiple impair de $\pm\pi/2$, soit encore

$$\theta = \pm\frac{\pi}{8} \left[\mathsf{mod}\ \frac{\pi}{2}\right] .$$

Les solutions sont donc

$$\theta = \frac{\pi}{8} , \qquad \theta = \frac{5\pi}{8} , \qquad \theta = \frac{9\pi}{8} , \qquad \theta = \frac{13\pi}{8} .$$

c) L'équation

$$8X^4 - 8X^2 + 1 = 0 ,$$

est une équation bicarrée. Soit $x = X^2$, on doit résoudre $8x^2 - 8x + 1 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 64 - 32 = 32$, une racine carrée en est $\delta = 4\sqrt{2}$. Les solutions sont

$$x_1 = \frac{8 + 4\sqrt{2}}{16} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} , \qquad x_2 = \frac{8 - 4\sqrt{2}}{16} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} .$$

Les solutions de l'équation bicarrée sont

$$\pm\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} , \qquad \pm\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} .$$

$\cos(\pi/8)$ est la plus grande de ces quatre valeurs :

$$\cos(\pi/8) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} .$$