

CUPGE, Aix-Marseille Université

Première année, premier semestre 2015-16

Devoir Surveillé 3, 6 Janvier 2016

Durée : 2 heures

Documents, calculatrice et téléphone non autorisés. Prêter la plus grande attention à la rédaction, notamment en explicitant (succinctement) les propriétés et méthodes utilisées.

Exercice 1 (Plan complexe)

1. On considère la droite (D) du plan d'équation cartésienne

$$x + 2y - 1 = 0 \quad (\#)$$

- a) Donner un vecteur directeur $\vec{d}$ et un vecteur normal $\vec{n}$ de (D) .
b) Soient $A(-1, 1) \in (D)$ et $B(2, 2) \notin (D)$. Calculer le projeté orthogonal P de B sur (D) , la distance de B à (D) , et en déduire l'aire du triangle ABP .
2. On identifie maintenant le plan au plan complexe. Soit f la similitude directe du plan définie par $f : M(x, y) \rightarrow M'(x', y') = f(M)$, où $z' = x' + iy' = iz - 1 = i(x + iy) - 1$.
a) Déterminer les éléments caractéristiques de f (son centre Ω , son rapport λ et son angle θ).
b) Montrer que $M(x, y) \in (D)$ si et seulement son affixe $z = x + iy$ satisfait une équation de la forme

$$\bar{\omega}z + \omega\bar{z} + \mu = 0 ,$$

et identifier les nombres $\omega \in \mathbb{C}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Quel est le lien entre ω et $\vec{d}$?

- c) Montrer que l'image de (D) par f est une droite, et en donner un vecteur directeur $\vec{d}'$.

Exercice 2 (Géométrie dans l'espace)

Soit (P) le plan contenant les trois points $A(1, 2, 3)$, $B(2, 3, 1)$ et $C(3, 1, 2)$.

1. Donner une équation cartésienne de (P)
2. On considère le plan (P') défini par l'équation paramétrique

$$x(s, t) = 3s + 6t + 1 , \quad y(s, t) = 5s + 4t + 1 , \quad z(s, t) = 7s + 2t + 1 .$$

Montrer que (P) et (P') ne sont pas parallèles, et déterminer leur intersection $(P) \cap (P')$. Quelle est la nature géométrique de cette intersection ?

3. Soit $E(2, 2, -4)$. Calculer la distance $d(E, (P))$ au plan (P) .

Exercice 3 (Equation algébrique)

Dans $\mathbb{C}$ on considère l'équation

$$1 + z^3 + z^6 = 0 \quad (*)$$

1. Montrer que z est solution si et seulement si $\bar{z}$ est solution.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $1 + Z + Z^2 = 0$.
3. Donner toutes les solutions de l'équation (*) sous forme exponentielle.

Exercice 4 (Polynômes)

Soient $A, B \in \mathbb{C}[X]$ définis par

$$A(X) = 2X^4 - X^3 - 6X^2 - X + 2, \quad B(X) = 2X^3 - 5X^2 - 4X + 3.$$

1. PGCD et polynômes de Bézout :

- a) Énoncer le théorème de Bézout
- b) Calculer un PGCD P de A et B .
- c) Calculer les polynômes de Bézout U et V de A et B .

2. Factorisation :

- a) Calculer les polynômes a et b tels que $A = aP$ et $B = bP$.
- b) Calculer les racines de P , a et b .
- c) En déduire une factorisation de A et B .

Corrigé

Correction de l'exercice 1 (Plan complexe)

1. On considère la droite (D) du plan d'équation cartésienne

$$x + 2y - 1 = 0 \quad (\#)$$

- a) Un vecteur normal se déduit de l'équation cartésienne : $\vec{n} = (1, 2)$. De là on en déduit un vecteur directeur $\vec{d} = (2, -1)$.
- b) Soient $A(-1, 1) \in (D)$ et $B(2, 2) \notin (D)$. Soit $P(x, y)$ le projeté orthogonal de B sur (D) . $P \in (D)$, donc $x + 2y - 1 = 0$. Par ailleurs, $\overrightarrow{BP} \perp \vec{d}$ implique que $2(x - 2) - (y - 2) = 0$. On a donc à résoudre le système

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

De la première équation on déduit $x = 1 - 2y$, et en insérant dans la seconde on obtient $2(1 - 2y) - y = 2$, soit $y = 0$, d'où $x = 1$.

La distance de B à (D) est donnée par

$$d(B, (D)) = BP = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{5}.$$

Comme le triangle ABP est rectangle en P , son aire est donnée par

$$\text{Aire}(ABP) = \frac{1}{2} AP BP = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 1} \sqrt{5} = \frac{5}{2}.$$

2. On identifie maintenant le plan au plan complexe. Soit f la similitude directe du plan définie par $f : M(x, y) \rightarrow M'(x', y') = f(M)$, où $z' = x' + iy' = iz - 1 = i(x + iy) - 1$.

- a) Déterminons les éléments caractéristiques de f : son centre Ω est son point fixe, d'affixe z_Ω tel que $iz_\Omega - 1 = z_\Omega$, soit

$$z_\Omega = \frac{1}{-1 + i} = \frac{-1 - i}{2}$$

On sait que pour une similitude directe de la forme $z \rightarrow \alpha z + \beta$, le rapport vaut $\lambda = |\alpha|$ et l'angle vaut $\theta = \arg(\alpha)$. Ici $\alpha = i$, on a donc $\lambda = 1$ et $\theta = \pi/2$.

- b) Soit $M(x, y) \in (D)$. Alors on a $x + 2y - 1 = 0$. Comme $x = (z + \bar{z})/2$ et $y = (z - \bar{z})/2i$, cette équation s'écrit

$$z + \bar{z} + 2i(z - \bar{z}) - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (1 + 2i)z + (1 - 2i)\bar{z} - 2 = 0,$$

ce qui est la forme recherchée en posant $\omega = 1 + 2i$ et $\mu = -2$.

- c) Soit $z \in (D)$, soit $z' = iz - 1$. On a alors $z = (z' + 1)/i = -iz' - i$. En reportant dans l'équation obtenue ci-dessus, on obtient

$$\bar{\omega}(-iz' - i) + \omega(iz' + i) - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad i\bar{\omega}z' + i\omega\bar{z}' - (2 - i\bar{\omega} + i\omega) = 0,$$

ce qui est l'équation d'une droite. Pour obtenir un vecteur directeur, notons que $i\omega = -2 + i$, un vecteur directeur est donc $\vec{d}' = (2, -1)$.

Correction de l'exercice 2 (Géométrie dans l'espace)

Soit (P) le plan contenant les trois points $A(1, 2, 3)$, $B(2, 3, 1)$ et $C(3, 1, 2)$.

1. Calculons $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -2)$ et $\overrightarrow{AC} = (2, -1, -1)$. Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-3, -3, -3)$ est perpendiculaire à (P) . On peut donc prendre $\vec{n} = (1, 1, 1)$ comme vecteur normal. (P) est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, ce qui s'écrit

$$(x - 1) + (y - 2) + (z - 3) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x + y + z - 6 = 0 .$$

2. On considère le plan (P') défini par l'équation paramétrique

$$x(s, t) = 3s + 6t + 1 , \quad y(s, t) = 5s + 4t + 1 , \quad z(s, t) = 7s + 2t + 1 .$$

Une base de (P') est donnée par les vecteurs $\vec{u} = (3, 5, 7)$ et $\vec{v} = (6, 4, 2)$. On a $\vec{u} \wedge \vec{v} = (-18, 36, -18)$, on peut donc prendre comme vecteur normal à (P') le vecteur $\vec{n}' = (1, -2, 1)$. $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires, donc les deux plans ne sont pas parallèles. Leur intersection est donc une droite.

Pour la déterminer, cherchons une équation cartésienne pour (P') : on voit que $D(1, 1, 1) \in (P')$. Donc $M(x, y, z) \in (P')$ si et seulement si $\overrightarrow{DM} \cdot \vec{n}' = 0$, ce qui donne $(x - 1) - 2(y - 1) + (z - 1) = 0$, soit encore $x - 2y + z = 0$. Ainsi, on a montré que $(P) \cap (P')$ est la droite d'équations cartésiennes

$$x + y + z - 6 = 0 , \quad x - 2y + z = 0 .$$

3. Soit $E(2, 2, -4)$. Pour calculer la distance $d(E, (P))$ au plan (P) , il suffit d'utiliser la formule du cours

$$d(E, (P)) = \frac{|2 + 2 - 4 - 6|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = 2\sqrt{3} .$$

Correction de l'exercice 3 (Equation algébrique)

Dans $\mathbb{C}$ on considère l'équation

$$1 + z^3 + z^6 = 0 \quad (*)$$

1. Soit z une solution de $(*)$. Alors $1 + z^3 + z^6 = 0$, ce qui implique en prenant le complexe conjugué de cette équation membre à membre que $1 + \bar{z}^3 + \bar{z}^6 = 0$, d'où $\bar{z}$ est solution également. On peut faire le même raisonnement : supposons que $\bar{z}$ soit solution de $(*)$, alors $1 + \bar{z}^3 + \bar{z}^6 = 0$, et par conjugaison complexe de nouveau, $1 + z^3 + z^6 = 0$, ce qui implique que z est solution de $(*)$. Montrer que z est solution si et seulement si $\bar{z}$ est solution.
2. Dans $\mathbb{C}$ on considère l'équation : $1 + Z + Z^2 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = -3$, ses racines carrées sont $\pm i\sqrt{3}$. Les solutions de cette équation sont donc

$$Z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{2i\pi/3} , \quad Z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{4i\pi/3} = \bar{Z}_1 .$$

3. z est solution de $(*)$ si et seulement si $Z = z^3$ est solution de $Z^2 + Z + 1 = 0$, c'est à dire si et seulement si $z^3 = Z_1$ ou $z^3 = Z_2$.

Les racines de Z_1 sont de module 1 et d'argument θ tel que $3\theta = 2\pi/3 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, soit donc $\theta = 2\pi/9$, $\theta = 2\pi/9 + 2\pi/3 = 8\pi/9$ et $\theta = 2\pi/9 + 4\pi/3 = 14\pi/9$. Les racines de Z_2 sont complexes conjuguées des racines ainsi obtenues. On en déduit les 6 solutions de $(*)$:

$$e^{2i\pi/9} , \quad e^{8i\pi/9} , \quad e^{14i\pi/9} , \quad e^{-2i\pi/9} , \quad e^{-8i\pi/9} , \quad e^{-14i\pi/9} .$$

Correction de l'exercice 4 (Polynômes)

Considérons les polynômes

$$A(X) = 2X^4 - X^3 - 6X^2 - X + 2, \quad B(X) = 2X^3 - 5X^2 - 4X + 3.$$

1. PGCD et polynômes de Bézout

- a) **Théorème de Bézout** : soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes et P un PGCD de A et B . Alors il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $d^\circ(U) < d^\circ(B)$ et $d^\circ(V) < d^\circ(A)$ et

$$AU + BV = P.$$

- b) Ecrivons

$$\begin{aligned} A &= Q_0B + R_1, & Q_0(X) &= X + 2, & R_1(X) &= 8X^2 + 4X - 4 \\ B &= Q_1R_1 + R_2, & Q_1(X) &= (X - 3)/4, & R_2(X) &= 0 \end{aligned}$$

Le dernier reste non nul est donc R_1 , donc Un PGCD de A et B est donc

$$P(X) = R_1(X) = 8X^2 + 4X - 4.$$

- c) L'algorithme de Bézout donne

$$P = R_1 = A - Q_0B.$$

Les polynômes de Bézout sont donc

$$U(X) = 1, \quad V(X) = -Q_0(X) = -X - 2.$$

2. Factorisation de A et B

- a) Les divisions euclidiennes donnent

$$a(X) = \frac{1}{4}X^2 - \frac{1}{4}X - \frac{1}{2}, \quad b(X) = \frac{1}{4}X - \frac{3}{4}$$

- b) — Ecrivons $P(X) = 4p(X)$ avec $p(X) = 2X^2 + X - 1$, calculons les racines de p . Le discriminant de p vaut $\Delta = 9$, les racines de P sont donc

$$\frac{-1 - 3}{4} = -1, \quad \frac{-1 + 3}{4} = \frac{1}{2}$$

d'où la factorisation

$$P(X) = 4(X + 1)(X - 1/2) = 2(X + 1)(2X - 1).$$

- Les racines de a sont -1 et 2 , d'où la factorisation

$$a(X) = \frac{1}{4}(X + 1)(X - 2)$$

- b admet 3 comme unique racine.

$$b(x) = \frac{1}{4}(X - 3).$$

- c) On a donc

$$A(X) = (X + 1)^2(X - 2)(2X - 1), \quad B(X) = (X + 1)(X - 2)(2X - 1).$$