

CUPGE, Aix-Marseille Université

Première année, premier semestre 2015-16

Géométrie, exercices

1 Vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Exercice 1.1 (Familles orthonormées)

Préciser si les familles formées des vecteurs ci-dessous sont orthonormées, c'est à dire que les vecteurs sont de norme 1, et qu'ils sont deux à deux orthogonaux.

1. Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{F} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ avec $\vec{u} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ et $\vec{v} = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ avec $\vec{u} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$, $\vec{v} = (-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$ et $\vec{w} = (-\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6, -\sqrt{6}/3)$.

Exercice 1.2 (Vecteurs colinéaires de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$)

1. On considère les vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ suivants :

$$(a) \quad \vec{u} = (1, m), \quad \vec{v} = (m, 1) . \qquad (b) \quad \vec{u} = (m, m^2), \quad \vec{v} = (m, 1)$$

Déterminer les valeurs de m pour lesquelles $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2. Soient les points $A(1, -1, 1)$, $B(-1, 1, -1)$, $C(1, -1, -1)$ et $D(1/3, -1/3, -5/3)$. Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 1.3

Soient A, B, C et D quatre points de l'espace.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.
2. En déduire que si, dans un tétraèdre, deux paires d'arêtes opposées sont formées d'arêtes orthogonales, alors il en est de même pour la troisième paire.
3. En déduire aussi qu'un quadrilatère plan dont les côtés opposés sont perpendiculaires a des diagonales perpendiculaires.
4. Dessiner un tel quadrilatère.

Exercice 1.4

Soient $A(4, 0)$, $B(2, 3)$ et $C(6, 3)$ trois points du plan. Vérifier que $OACB$ est un parallélogramme, puis calculer son aire.

Exercice 1.5

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Montrer que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) , \qquad \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) .$$

Exercice 1.6

Calculer les produits vectoriels suivants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1. $\vec{u} = u(1, 2, 3)$ et $\vec{v} = (2, 0, 4)$.
2. $\vec{u} = (-1, 4, 2)$ et $\vec{v} = (1, 1, 1)$.
3. $\vec{u} = (0, 2, 0)$ et $\vec{v} = (3, 0, 1)$.

Exercice 1.7

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\vec{u} = (1, -1, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, -1)$ et $\vec{w} = (-1, 0, -1)$.

1. Calculer les composantes des vecteurs : $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ et $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$.
2. Que peut-on en déduire ?

Exercice 1.8

A, B, C et D étant 4 points quelconques de l'espace, montrer que

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}.$$

Indication : On pourra montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}$.

Exercice 1.9

Montrer que si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un repère orthonormé de l'espace alors $(\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{v} \wedge \vec{w}, \vec{w} \wedge \vec{u})$ l'est aussi.

Exercice 1.10

Soient 3 vecteurs quelconques $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace.

1. Montrer que $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = -(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} + (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v}$.
2. Montrer l'*Identité de Jacobi* : $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{0}$. Indication : Utiliser la question précédente.

Exercice 1.11

On considère le parallélogramme défini par les vecteurs $\vec{u} = (1, 3)$ et $\vec{v} = (2, -1)$. Le dessiner et déterminer son aire.

Exercice 1.12

Dessiner le parallélépipède engendré dans l'espace $\mathbb{R}^3$ par les trois vecteurs $\vec{v}_1 = (2, 0, 2)$, $\vec{v}_2 = (1, 2, 3)$ et $\vec{v}_3 = (1, 4, -1)$ et passant par l'origine. Calculer le volume de ce parallélépipède.

2 Géométrie affine

Exercice 2.1

Soit (D) une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, et $M_0(x_0, y_0)$ un point de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $\vec{v} = (-b, a)$ est un vecteur directeur de (D) .
2. Donner une équation cartésienne de la droite (D') passant par M_0 et orthogonale à (D) .
3. Donner le point d'intersection entre (D) et (D') .
4. Montrer que

$$d(M_0, (D)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Exercice 2.2

1. On considère les deux droites d'équations cartésiennes respectives $2x + 3y = 4$ et $4x - my = 8$, où m est un paramètre. Déterminer la valeur de m pour laquelle ces deux droites sont parallèles. Que peut-on observer ?
2. Même question pour les droites d'équations cartésiennes $2x + 3y = 4$ et $4x - my = 7$.

Exercice 2.3

1. Donner une équation cartésienne de la droite (D) d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x &= x(t) &= a_1t + b_1 \\ y &= y(t) &= a_2t + b_2 \end{cases}$$

2. Soit (D) une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$. Donner une équation paramétrique de (D) (discuter les cas, selon que (D) est verticale, horizontale ou oblique).

Exercice 2.4

1. On considère la droite du plan définie par le vecteur directeur $\vec{d} = (1, 3)$ et passant par l'origine. Déterminer un vecteur normal, et une équation cartésienne pour cette droite. En donner aussi une représentation paramétrique.

- On considère la droite du plan définie par le vecteur normal $\vec{n} = (1, 3)$ et le point $A(1, 2)$. Déterminer un vecteur directeur, et une équation cartésienne pour cette droite. En donner aussi une représentation paramétrique.
- Soit (D) la droite définie par l'équation cartésienne $4x - y = 1$. Donner un vecteur directeur et un vecteur normal pour (D) . En donner aussi une représentation paramétrique.
- Soient (D_1) et (D_2) les droites d'équations cartésiennes respectives $2x - y = 2$ et $x + my = 0$, où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Pour quelles valeurs de m a-t-on $(D_1) \cap (D_2) = \emptyset$?

Exercice 2.5

Trouver une équation du plan (P) contenant les points A , B et C dans les cas suivants

- $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, 0)$ et $C(0, 1, 0)$.
- $A(1, 1, 1)$, $B(2, 0, 1)$ et $C(-1, 2, 4)$.

Exercice 2.6

Trouver une équation du plan (P) contenant le point A et de base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ dans les cas suivants

- $A(1, 2, 1)$, $\vec{u} = (4, 0, 3)$ et $\vec{v} = (1, 3, -1)$.
- $A(1, 0, 2)$, $\vec{u} = (2, -1, 3)$ et $\vec{v} = (-1, 4, 5)$.

Exercice 2.7

Trouver une équation du plan (P) contenant le point A et la droite (D) dans les cas suivants

- $A(0, 0, 0)$ et $(D) = \{(x, y, z) : x + y - z + 3 = 0 \text{ et } 4x - y + 2z = 0\}$.
- $A(1, 1, 0)$ et $(D) = \{(t, -1 + 2t, 1 - 3t), t \in \mathbb{R}\}$

Exercice 2.8

Soit (D) la droite dans l'espace, définie par l'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x(t) = 1 + t\frac{\sqrt{6}}{6} \\ y = y(t) = t\frac{\sqrt{6}}{6} \\ z = z(t) = 2t\frac{\sqrt{6}}{6} \end{cases}$$

Soit la droite (Δ) , intersection des deux plans d'équations cartésiennes respectives :

$$x + y + z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x - y - 2 = 0.$$

Calculer le cosinus de l'angle aigu entre ces deux droites.

Exercice 2.9

Soient (D_1) , (D_2) et (D_3) trois droites définies par les systèmes d'équations respectifs

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 3 \\ x + z = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

- Démontrer que (D_1) et (D_2) sont parallèles et non confondues.
- Démontrer que (D_2) et (D_3) ne se coupent pas.
- Démontrer que (D_1) et (D_3) sont sécantes en un point et calculer les coordonnées de ce point.

Exercice 2.10

Soit (P) le plan d'équation $2x - y + z = 3$ et soit (D) une droite dirigée par $\vec{u} = (1, 3, 1)$.

- La droite (D) est-elle parallèle à (P) ? Est-elle orthogonale à (P) ?
- Une droite dirigée par le vecteur $\vec{v} = (-2, 1, -1)$ est-elle orthogonale à (P) ?
- Démontrer que la droite passant par le point $A(1, 0, 1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{w} = (0, 1, 1)$ est contenue dans (P) .

Exercice 2.11

On se donne, dans $\mathbb{R}^3$, le plan (P) , défini par les points $A = (1, 1, 1)$, $B(0, 2, 0)$ et $C(0, -1, 1)$. Donner les composantes d'un vecteur orthogonal au plan (P) , puis une équation cartésienne de (P) .

Exercice 2.12

1. Soit (P) le plan de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation cartésienne $x+y+2z+1=0$. Donner une équation paramétrique de P .
2. Soit (P) le plan de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation paramétrique

$$x = x(t) = 1 + t + s, \quad y = y(t) = t - s, \quad z = z(t) = -1 + 2t - s.$$

Donner une équation cartésienne de (P) .

Exercice 2.13

1. On se donne une droite de vecteur directeur $\vec{v}$ et un point A , et on cherche la distance $d(A, (D))$ entre A et (D) , c'est à dire la distance entre A et le point de (D) le plus proche. Vérifier que si M_0 est un point de (D) alors

$$d(A, (D)) = \frac{\|\vec{v} \wedge \overrightarrow{AM_0}\|}{\|\vec{v}\|}$$

2. Calculer la distance de $A(1, 2, 3)$ à la droite $(D) = \{(x, y, z) : -2x + y - 3z = 1 \text{ et } x + z = 1\}$.

Exercice 2.14

Déterminer la distance du point A au plan (P) dans les cas suivants

1. $A(1, 0, 2)$ et $(P) = \{(x, y, z) : 2x + y + z + 4 = 0\}$.
2. $A(3, 2, 1)$ et $(P) = \{(x, y, z) : -x + 5y - 4z = 5\}$.

Exercice 2.15

Soient (P_1) et (P_2) les plans de l'espace d'équations cartésiennes respectives :

$$(P_1) : 2x + y - z + 3 = 0, \quad \text{et} \quad (P_2) : -x + z = 0.$$

Soit α l'angle aigu entre ces deux plans. On note $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ les vecteurs normaux de (P_1) et (P_2) respectivement. On suppose que $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont de norme 1, et ont leur première coordonnée positive.

1. Déterminer les coordonnées de $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.
2. Montrer que α est l'angle aigu entre $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.
3. En déduire $\sin(\alpha)$.

Exercice 2.16

Ecrire les équations cartésienne et paramétrique du cercle de centre $I(1, -1)$ et de rayon 2 (dans le plan).

Exercice 2.17

Montrer que l'équation polaire d'un cercle passant par $O(0, 0)$ est de la forme : $\rho = 0$, où $\rho = a \cos \theta + b \sin \theta$, et où a et b sont deux nombres réels.

Exercice 2.18

Soient $A(1, 2)$ et $B(-1, 3)$ dans le plan repéré. Montrer que l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ soient orthogonaux est un cercle de diamètre AB . En donner une équation cartésienne.

Exercice 2.19

Soit a un nombre réel fixé. Montrer que l'équation polaire de la droite verticale passant par $A(a, 0)$ est de la forme $\rho = a / \cos \theta$.

Exercice 2.20

On considère les trois points de l'espace suivants $A(0, 1, 0)$, $B(-1, 1, 0)$ et $C(-1, 1, 1)$.

1. Vérifier qu'ils ne sont pas alignés.
2. Donner l'angle aigu et non-orienté entre les droites (AB) et (AC) .
3. Donner une équation paramétrée du plan (P) passant par ces trois points.
4. Donner une équation cartésienne du plan (P) .
5. Donner la distance $d(D, (P))$ où $D(1, 0, 1)$.
6. Donner une équation paramétrée de la droite (Δ) perpendiculaire au plan (P) et passant par le point D .
7. Donner l'aire du triangle ABC .

3 Transformations du plan

Exercice 3.0

1. Soit f la similitude directe de centre $A(1, 1)$, d'angle $\theta = \pi/3$ et de rapport $\lambda = 2$. Exprimer l'image par f d'un point quelconque $M(x, y)$ du plan.
2. Soit g la translation du plan de vecteur $\vec{u} = (2, 1)$. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ et conclure.
3. Soit (D_1) la droite du plan d'équation $y = 3x$. Donner explicitement la projection orthogonale sur (D_1) et la symétrie axiale par rapport à (D_1) . Puis calculer la distance du point $M_1(3, -1)$ à la droite (D_1) .
4. On considère 3 points O, A et B du plan tels que $(\vec{AB}, \vec{OB}) = -3\pi/10$ et $(\vec{AB}, \vec{AO}) = \pi/5$. Quel est l'angle de la similitude directe s de centre O telle que $s(A) = B$?
5. Quel est le rapport de la similitude s qui transforme le point $A(5, -13)$ en $C(-1, -12)$ et le point $B(6, -15)$ en $D(1, 12)$?
6. Montrer que la composée de deux symétries est une translation ou une rotation.
7. Montrer que la composée de deux rotations est une translation ou une rotation.
8. Dans le plan on considère deux segments $[AC]$ et $[BD]$ tels que $AC = BD$ et $(\vec{AC}, \vec{BD}) = -\pi/2 [\text{mod } 2\pi]$. On appelle (C_1) , (C_2) , (C_3) et (C_4) les cercles de diamètres respectifs $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.
 - a) Soit r la rotation qui transforme A en B et C en D . Quel est l'angle de r ? Montrer que le centre I de r appartient aux cercles (C_1) et (C_3) .
 - b) Soit r' la rotation qui transforme A en D et C en B . Quel est l'angle de r' ? Montrer que le centre J de r' appartient aux cercles (C_2) et (C_4) .
 - c) On désigne par M le milieu de $[AC]$ et par N celui de $[BD]$. Quelle est la nature du quadrilatère $INJM$?
 - d) On désigne par P et R les points diamétralement opposés à I sur, respectivement, (C_1) et (C_3) et par Q et S les points diamétralement opposés à J sur, respectivement, (C_2) et (C_4) .
Soit s la similitude directe de centre I , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\pi/4$. Quelles sont les images par s des points D, N, B ?
9. Soient h une homothétie de rapport k et h' une homothétie de rapport k' et de centres respectifs O et O' .
 - a) Soit t une translation de vecteur $\vec{u}$. Montrer que les composées $h \circ t$ et $t \circ h$ sont des homothéties de rapport k .
 - b) Si $kk' \neq 1$, montrer que $h \circ h'$ est une homothétie de rapport kk' et que les centres de h , h' et $h \circ h'$ sont alignés.
 - c) Si $kk' = 1$, montrer que $h \circ h'$ est une translation.

Exercice 3.1

Dans le plan orienté, on considère un triangle OAB direct et rectangle en O . On désigne par J le milieu de $[AB]$. M est un point variable de la droite (D) perpendiculaire en A à (AB) . La perpendiculaire en O à (OM) coupe (AB) en M' .

1. Soit s la similitude de centre O telle que $s(A) = B$.
 - a) Montrer que, pour tout point M de (D) , $s(M) = M'$.
 - b) En déduire que, lorsque M décrit (D) , le triangle OMM' reste semblable à un triangle fixe que l'on précisera.
2.
 - a) Montrer que, pour tout point M de (D) , le point I milieu de $[MM']$ est l'image de M par une similitude S de centre O dont on précisera le rapport et l'angle.
 - b) Soit H le projeté orthogonal de O sur (D) . Déterminer $S(H)$.
 - c) Déterminer le lieu géométrique du point I lorsque M décrit (D) .
3. Pour tout point M de (D) distinct de A , on désigne par P le point tel que $MAM'P$ est un rectangle. Déterminer le lieu géométrique du point P lorsque M décrit $(D) - \{A\}$.

Exercice 3.2

Soit f la rotation de centre $I(-2, 0)$ et d'angle $\pi/3$. Soit C le cercle de centre $A(0, 2)$ et de rayon 4. Soit D la droite passant par $B(-1, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (1, 1)$.

1. Donner l'expression de f . Donner une équation cartésienne de D et de C .
2. Quelles sont les images de C et D par f ? En passant par l'expression complexe de la rotation, vérifier que l'image d'un cercle est un cercle de même rayon, et que l'image d'une droite D est une droite D' . Vérifier que l'angle entre D et D' est l'angle de la rotation.
3. Soit h une homothétie de rapport r . En passant par l'expression complexe, vérifier que l'image d'un cercle de rayon R est un cercle de rayon rR , et que l'image d'une droite est une droite parallèle.
4. En déduire l'image d'un cercle et d'une droite par une similitude (par composition).
5. Déterminer l'intersection de D et C .
6. Soit g la similitude de centre A , de rapport 2 et d'angle $\pi/6$. Donner l'expression de g . Quelles sont les images de C et D par g ?

Exercice 3.3

Soient C_1 le cercle de centre l'origine O , et de rayon 2, et C_2 le cercle de centre $A(2,0)$ et de rayon 4. Soit D la droite d'équation cartésienne $x - 2 = 0$. Soit f une similitude du plan qui envoie C_1 sur C_2 et l'axe des abscisses sur D .

1. Montrer que $f(O) = A$. En déduire que ni O ni A n'est le centre de la similitude.
2. Montrer que le rapport de la similitude est 2.
3. Déterminer l'ensemble E_1 des points M tels que $MA = 2MO$.
4. Montrer que l'angle de la similitude est $\pi/2$.
5. Déterminer les points M_1 et M_2 d'intersection entre D et C_2 .
6. Soit $B(-2,0)$. Déterminer l'ensemble image $f(\{A, B\})$.
7. Déterminer l'ensemble E_2 des points M tels que $MA^2 + MO^2 = OA^2$, puis $E_1 \cap E_2$.
8. Déterminer les coordonnées du centre $I(x_I, y_I)$ de la similitude.
9. En déduire que $f(z) = 2iz + 2$, $\forall z \in \mathbb{C}$, puis l'image de A et B .

Exercice 3.4

Dans le plan orienté, une unité étant choisie, on considère un rectangle $ABCD$ tel que

$$AB = \sqrt{2}, \quad AD = 1, \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \text{ est un angle droit direct.}$$

On désigne par I le milieu du segment $[AB]$.

Partie A : Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que $MD^2 - MB^2 = 1$.

1. Vérifier que les points C et I appartiennent à (E) .
2. a) Déterminer et construire (E) .
b) En déduire que les droites (BD) et (CI) sont perpendiculaires.

Partie B : Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(A, \vec{u}, \vec{v})$, où $\vec{u} = \overrightarrow{AB}/\sqrt{2}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. Soit S une similitude directe qui, au point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = az + b$, où a et b sont des nombres complexes avec a non nul.

1. Déterminer les nombres complexes a et b pour que $S(D) = C$ et $S(C) = B$.
2. Soit T la similitude directe qui, au point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = -i\frac{\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i.$$

Déterminer le rapport et l'angle de T .

3. Montrer que la similitude T transforme B en I .
4. En déduire une autre justification de l'orthogonalité des droites (BD) et (CI) .
5. Montrer que le centre W de la similitude T est le point d'intersection des droites (BD) et (CI) .

Corrections rapides

1 Vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Correction de l'exercice 1.1 (Familles orthonormées)

1. Calculons

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) \cdot (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 ,$$

les vecteurs sont donc orthogonaux. De même

$$\|\vec{u}\|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 , \quad \|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 .$$

C'est donc bien une famille orthonormée (et même un repère orthonormé du plan).

2. Calculons

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0) \cdot (-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3) = -\frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{6} + 0 = 0 .$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0) \cdot (-\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6, -\sqrt{6}/3) = -\frac{\sqrt{12}}{12} + \frac{\sqrt{12}}{12} + 0 = 0 .$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3) \cdot (-\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6, -\sqrt{6}/3) = \frac{\sqrt{18}}{18} + \frac{\sqrt{18}}{18} - \frac{\sqrt{18}}{9} = 0 .$$

De plus, on a aussi

$$\|\vec{u}\|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1 , \quad \|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 , \quad \|\vec{w}\|^2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = 1 .$$

C'est donc bien une famille orthonormée (et même un repère orthonormé du plan).

Correction de l'exercice 1.2 (Vecteurs colinéaires de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$)

1. (a) : On considère les vecteurs $\vec{u} = (1, m)$ et $\vec{v} = (m, 1)$. Les deux sont non-nuls. Cherchons λ tel que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$. Ceci revient au système d'équations $m = \lambda$ et $1 = \lambda m$, qui n'a de solution que pour $m = \pm 1$. Alternativement, on a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 1 - m^2$. Les vecteurs sont donc colinéaires si et seulement si $m^2 = 1$, soit $m = \pm 1$.
- (b) : On considère les vecteurs $\vec{u} = (m, m^2)$ et $\vec{v} = (m, 1)$. Le déterminant vaut $\det(\vec{u}, \vec{v}) = m - m^3$ et est nul si et seulement si $m = \pm 1$ ou $m = 0$.
2. Soient les points $A(1, -1, 1)$, $B(-1, 1, -1)$, $C(1, -1, -1)$ et $D(1/3, -1/3, -5/3)$. Calculons les vecteurs $\overrightarrow{AB} = (-2, 2, -2)$ et $\overrightarrow{CD} = (-2/3, 2/3, -2/3) = \overrightarrow{AB}/3$. Ces vecteurs sont colinéaires, donc (AB) et (CD) sont parallèles.

Correction de l'exercice 1.3

Soient A, B, C et D quatre points de l'espace.

1. Calculons, en utilisant la relation de Chasles,

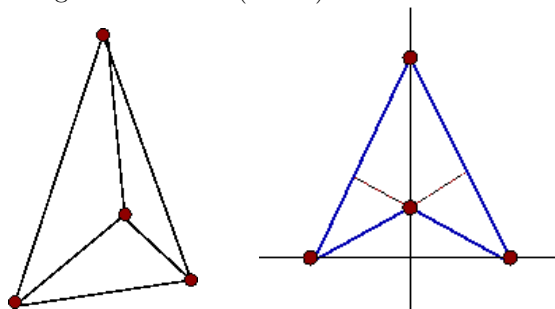
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} \\ &= \vec{0} . \end{aligned}$$

2. un tétraèdre est un polyèdre de l'espace à quatre sommets. Chaque sommet est relié aux trois autres par une arête (voir figure ci-dessous, figure de gauche). Supposons sans perte de généralité que les deux paires d'arêtes opposées formées d'arêtes orthogonales sont $[AB]$ et $[CD]$ d'une part, et $[AC]$ et $[BD]$ d'autre part, on a donc

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 , \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 ,$$

et le résultat de la question précédente implique donc $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et donc l'orthogonalité des deux arêtes opposées restantes $[AD]$ et $[BC]$.

3. On considère le quadrilatère plan $ABCD$. D'après l'énoncé, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, d'où $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, d'où l'orthogonalité des diagonales $[AC]$ et $[BD]$.
4. Un exemple se trouve sur la figure ci-dessous (droite).



Tétraèdre (gauche) et quadrilatère satisfaisant les conditions de la question 3 (droite)

Correction de l'exercice 1.4

Soient $A(4, 0)$, $B(2, 3)$ et $C(6, 3)$ trois points du plan. Calculons $\overrightarrow{OA} = (4, 0)$ et $\overrightarrow{CB} = (4, 0)$. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$, $OACB$ est donc un parallélogramme. Son aire peut être calculée de plusieurs manières, la plus simple est de recourir au déterminant :

$$\text{Aire}(OACB) = \det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 12 \text{ unités d'aire} .$$

Vérifier que $OACB$ est un parallélogramme, puis calculer son aire.

Correction de l'exercice 1.5

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Calculons

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} , \quad \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} .$$

En additionnant (ou soustrayant) ces deux équations terme à terme et en divisant par deux (ou quatre) on obtient le résultat désiré.

Correction de l'exercice 1.6

Calcul de produits vectoriels :

- $(1, 2, 3) \wedge (2, 0, 4) = (8, 2, -4)$.
- $(-1, 4, 2) \wedge (1, 1, 1) = (2, 3, -5)$.
- $(0, 2, 0) \wedge (3, 0, 1) = (2, 0, -6)$.

Correction de l'exercice 1.7

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\vec{u} = (1, -1, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, -1)$ et $\vec{w} = (-1, 0, -1)$.

- $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (-1, -1, 0)$ et $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (-1, 0, 1)$.
- Ceci confirme que le produit vectoriel n'est pas associatif.

Correction de l'exercice 1.8

Calculons tout d'abord, en utilisant la distributivité et l'antisymétrie du produit vectoriel

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \wedge (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD} .$$

Calculons maintenant

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD} \wedge (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) \\ &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA}) \wedge \overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{BD} \\ &= (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}) \wedge \overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} . \end{aligned}$$

On peut sans doute faire plus simple et rapide...

Correction de l'exercice 1.9

Si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un repère orthonormé de l'espace, alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est perpendiculaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et est donc proportionnel à $\vec{w}$. De plus, $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| = 1$, d'où $\vec{u} \wedge \vec{v} = \pm \vec{w}$. Le même raisonnement donne $\vec{v} \wedge \vec{w} = \pm \vec{u}$ et $\vec{w} \wedge \vec{u} = \pm \vec{v}$. On obtient donc un repère orthonormé (le même qu'au départ, dans un ordre différent).

Correction de l'exercice 1.10

Soient 3 vecteurs quelconques $\vec{u} = (x, y, z)$, $\vec{v} = (x', y', z')$ et $\vec{w} = (x'', y'', z'')$ de l'espace.

1. Calculons

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) &= (y(x'y'' - x''y') - z(z'x'' - z''x'), z(y'z'' - y''z') - x(x'y'' - x''y'), \\ &\quad x(z'x'' - z''x') - y(y'z'' - y''z')) \\ &= (x'(yy'' + zz'') - x''(yy' + zz'), y'(xx'' + zz'') - y''(xx' + zz''), \\ &\quad z'(xx'' + yy'') - z''(xx' + yy')) \\ &= (x'(xx'' + yy'' + zz'') - x''(xx' + yy' + zz'), y'(xx'' + yy'' + zz'') - y''(xx' + yy' + zz''), \\ &\quad z'(xx'' + yy'' + zz'') - z''(xx' + yy' + zz')) \\ &= (xx'' + yy'' + zz'')\vec{v} - (xx' + yy' + zz')\vec{u} \\ &= -(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} + (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v}\end{aligned}$$

2. Calculons maintenant

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = -(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} + (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} + (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{w} - (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v} + (\vec{w} \cdot \vec{v})\vec{u} = \vec{0}.$$

Correction de l'exercice 1.11

On considère le parallélogramme $\mathcal{P}$ défini par les vecteurs $\vec{u} = (1, 3)$ et $\vec{v} = (2, -1)$. L'aire vaut

$$\text{Aire}(\mathcal{P}) = |\det(\vec{u}, \vec{v})| = 7.$$

Correction de l'exercice 1.12

Dessiner le parallélépipède $\mathcal{P}$ engendré dans l'espace $\mathbb{R}^3$ par les trois vecteurs $\vec{v}_1 = (2, 0, 2)$, $\vec{v}_2 = (1, 2, 3)$ et $\vec{v}_3 = (1, 4, -1)$ et passant par l'origine. Le volume du parallélépipède vaut

$$\text{Vol}(\mathcal{P}) = |[\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3]| = 24.$$

2 Géométrie affine

Correction de l'exercice 2.1

Soient (D) une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, et $M_0(x_0, y_0)$ un point du plan.

1. On peut mettre l'équation cartésienne sous la forme

$$ax + by + c = 0 \iff a(x + c/a) + by = 0 \iff \overrightarrow{AM} \cdot (a, b) = 0,$$

où $A(-c/a, 0) \in (D)$. On retrouve ainsi la caractérisation de la droite par un point et un vecteur normal, en l'occurrence $\vec{n} = (a, b)$. Comme $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, on en déduit que $\vec{v}$ est un vecteur directeur de (D) .

2. La droite (D') passant par M_0 et orthogonale à (D) admet $\vec{v}$ comme vecteur normal. Son équation cartésienne est donc de la forme $-bx + ay + c' = 0$. Comme $M(x_0, y_0) \in (D')$, on en déduit que $-bx_0 + ay_0 + c' = 0$, d'où $c' = bx_0 - ay_0$. Ainsi, l'équation cartésienne de cette droite est

$$-b(x - x_0) + a(y - y_0) = 0 \iff -bx + ay + (bx_0 - ay_0) = 0.$$

3. Soit $H(x, y) \in (D) \cap (D')$. (x, y) satisfait le système

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 & (1) \\ -bx + ay + (bx_0 - ay_0) = 0 & (2) \end{cases}$$

En multipliant l'équation (1) par a et l'équation (2) par b et en soustrayant les deux équations ainsi obtenues, on obtient

$$(a^2 + b^2)x + ac - b(bx_0 - ay_0) = 0, \quad \text{soit} \quad x = \frac{-ac + b(bx_0 - ay_0)}{a^2 + b^2}.$$

De façon similaire, en multipliant l'équation (1) par b et l'équation (2) par a et en additionnant les deux équations ainsi obtenues, on obtient

$$(a^2 + b^2)y + bc + a(bx_0 - ay_0) = 0, \quad \text{soit} \quad y = \frac{-bc - a(bx_0 - ay_0)}{a^2 + b^2}.$$

On a donc

$$(x, y) = \left(\frac{-ac + b(bx_0 - ay_0)}{a^2 + b^2}, \frac{-bc - a(bx_0 - ay_0)}{a^2 + b^2} \right)$$

4. Finalement, $d(M_0, D) = MH$, et calculons

$$(x - x_0)^2 = \frac{(-ac + b(bx_0 - ay_0) - x_0(a^2 + b^2))^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{a^2(c + by_0 + ax_0)^2}{(a^2 + b^2)^2}$$

$$(y - y_0)^2 = \frac{(-bc - a(bx_0 - ay_0) - y_0(a^2 + b^2))^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{a^2(c + by_0 + ax_0)^2}{(a^2 + b^2)^2}$$

Finalement

$$MH^2 = \frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2},$$

et le résultat en découle.

Correction de l'exercice 2.2

1. On considère les deux droites d'équations cartésiennes respectives $2x + 3y = 4$ et $4x - my = 8$, où m est un paramètre. Deux vecteurs normaux sont donnés par $\vec{d}_1 = (2, 3)$ et $\vec{d}_2 = (4, -m)$. Les deux droites sont parallèles si et seulement si le déterminant de ces deux vecteurs est nul, c'est à dire si $-2m - 12 = 0$, soit $m = -6$. Dans ce cas les deux équations sont équivalentes, et les deux droites sont donc confondues.
2. On considère les deux droites d'équations cartésiennes respectives $2x + 3y = 4$ et $4x - my = 7$. Le déterminant des deux vecteurs normaux vaut cette fois encore $-2m - 12$, les deux droites sont parallèles si et seulement si $m = -6$. Dans ce cas par contre, les deux équations cartésiennes des deux droites sont différentes, donc les droites ne sont pas confondues.

Correction de l'exercice 2.3

1. On considère la droite (D) d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x &= x(t) &= a_1t + b_1 \\ y &= y(t) &= a_2t + b_2 \end{cases}$$

En multipliant la première égalité par a_2 et la seconde par a_1 et en soustrayant membre à membre les deux égalités ainsi obtenues, on obtient $a_2x - a_1y = a_2b_1 - a_1b_2$, soit

$$a_2x - a_1y - (a_1b_2 - a_2b_1) = 0.$$

Notons que d'après la représentation paramétrique, $\vec{d} = (a_1, a_2)$ est un vecteur directeur de la droite, d'où $\vec{n} = (a_2, -a_1)$ est un vecteur normal.

2. Soit (D) une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$. On suppose que a et b ne sont pas simultanément nuls.
 - Si $a = 0$, la droite est horizontale d'équation cartésienne $y = -c/b$.
 - Si $b = 0$, la droite est verticale d'équation cartésienne $x = -c/a$.
 - Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, on obtient facilement un vecteur directeur de la droite, par exemple $\vec{d} = (-b, a)$ et un point, par exemple $A(0, -c/b)$. On peut donc écrire la représentation paramétrique

$$(D) = \{M(x, y) : x = x(t) = -bt, y = y(t) = at - c/b, t \in \mathbb{R}\}.$$

Correction de l'exercice 2.4

1. On considère la droite du plan définie par le vecteur directeur $\vec{d} = (1, 3)$ et passant par l'origine. On peut choisir pour vecteur normal tout vecteur orthogonal à $\vec{d}$, par exemple $\vec{n} = (-3, 1)$. De là on déduit une équation cartésienne, de la forme $-3x + y + c = 0$, et comme l'origine $O(0, 0)$ appartient à la droite, on en déduit $c = 0$.

L'équation paramétrique se déduit du vecteur directeur : $M(x, y)$ appartient à la droite si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{OM} = t\vec{d}$. Cette dernière égalité se traduit par

$$x = x(t) = t, \quad y = y(t) = 3t.$$

et fournit l'équation paramétrique.

2. On considère la droite du plan définie par le vecteur normal $\vec{n} = (1, 3)$ et le point $A(1, 2)$.
 - Un vecteur directeur possible est $\vec{d} = (-3, 1)$.
 - Pour l'équation cartésienne, écrivons que $M(x, y)$ appartient à la droite si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, ce qui s'écrit $(x - 1) + 3(y - 2) = 0$, soit $x + 3y - 7 = 0$.
 - Une équation paramétrique peut être obtenue en écrivant que $M(x, y)$ appartient à la droite si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{d}$, soit $x - 1 = -3t$ et $y - 2 = t$, soit encore $x = -3t + 1$ et $y = t + 2$.
3. Soit (D) la droite vectorielle définie par l'équation cartésienne $4x - y = 1$.
 - Un vecteur normal se déduit directement de l'équation cartésienne : $\vec{n} = (4, -1)$.
 - On en déduit aussi un vecteur directeur possible est $\vec{d} = (1, 4)$.
 - Notons que $A(0, -1)$ appartient à la droite. $M(x, y)$ appartient à la droite si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{d}$, soit $(x, y + 1) = t(1, 4)$, ce qui fournit l'équation paramétrique $x = t, y = 4t - 1$.
4. Soient (D_1) et (D_2) les droites vectorielles d'équations cartésiennes respectives $2x - y = 2$ et $x + my = 0$, où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre. $(D_1) \cap (D_2) = \emptyset$ si et seulement si les deux droites sont parallèles et non confondues. Elles sont parallèles si et seulement si deux vecteurs normaux respectifs de (D_1) et (D_2) sont colinéaires, c'est à dire si et seulement si leur déterminant est nul. Prenons $\vec{n}_1 = (2, -1)$ et $\vec{n}_2 = (1, m)$. $\det(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 2m + 1 = 0$ si et seulement si $m = -1/2$. On vérifie que dans ce cas les deux équations cartésiennes ne sont pas identiques, et sont mêmes incompatibles.

Correction de l'exercice 2.5

On va voir ici quatre méthodes de résolution différentes.

1. On considère les points $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, 0)$ et $C(0, 1, 0)$. On a donc une base formée des vecteurs $\vec{d}_1 = \overrightarrow{AB} = (1, 0, -1)$ et $\vec{d}_2 = \overrightarrow{AC} = (0, 1, -1)$, ce qui donne un vecteur normal $\vec{n} = \vec{d}_1 \wedge \vec{d}_2 = (1, 1, 1)$. Le plan peut donc être défini comme l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, soit

$$(x, y, z - 1) \cdot (1, 1, 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + y + z = 1.$$

Autre méthode : A partir du vecteur normal obtenu, on sait que l'équation Cartésienne est de la forme $x + y + z = d$, où d est un nombre à déterminer. Il suffit alors de vérifier cette équation sur l'un des points, par exemple A , pour voir que $0 + 0 + 1 = d$ donne $d = 1$.

2. On considère les points $A(1, 1, 1)$, $B(2, 0, 1)$ et $C(-1, 2, 4)$. On a donc une base formée des vecteurs $\vec{d}_1 = \overrightarrow{AB} = (1, -1, 0)$ et $\vec{d}_2 = \overrightarrow{AC} = (-2, 1, 3)$. Le plan (P) peut donc être défini comme l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{d}_1 + \mu\vec{d}_2$, soit la représentation paramétrique

$$(x - 1, y - 1, z - 1) = (\lambda - 2\mu, -\lambda + \mu, 3\mu) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 1 = \lambda - 2\mu \\ y - 1 = -\lambda + \mu \\ z - 1 = 3\mu \end{cases}$$

C'est un système linéaire, qu'on va résoudre par substitution. La dernière équation donne donc $\mu = (z - 1)/3$, la seconde conduit alors à $\lambda = \mu - y + 1 = (z - 3y + 2)/3$, et la première conduit finalement à $x - 1 = (z - 3y + 2)/3 - 2(z - 1)/3 = -y - z/3 + 4/3$. En multipliant les deux membres par 3 pour simplifier, on aboutit ainsi à

$$3x + 3y + z = 7.$$

Méthode "bourrin" : allons-y franco ! On cherche une équation de la forme $ax + by + cz = d$; en utilisant les trois points à notre disposition, on aboutit au système linéaire

$$\begin{cases} a + b + c = d \\ 2a + c = d \\ -a + 2b + 4c = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = d \\ 2b + c = d \\ 3b + 5c = 2d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = d \\ 2b + c = d \\ -7c = -d \end{cases}$$

La dernière équation donne $d = 7c$, la deuxième donne $b = 3c$ et la première donne $a = d - b - c = 3c$. Les équations Cartésiennes possibles sont donc de la forme $3cx + 3cy + cz = 7c$, qui redonne l'équation précédente dans le cas particulier $c = 1$.

Correction de l'exercice 2.6

On considère le plan (P) contenant le point A et de base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ dans les cas suivants

1. $A(1, 2, 1)$, $\vec{u} = (4, 0, 3)$ et $\vec{v} = (1, 3, -1)$. Un vecteur normal est donné par $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = (-9, 7, 12)$. Donc $M(x, y, z) \in (P)$ si et seulement si $(x - 1, y - 2, z - 1) \cdot (-9, 7, 12) = 0$, soit

$$-9x + 7y + 12z - 17 = 0.$$

2. $A(1, 0, 2)$, $\vec{u} = (2, -1, 3)$ et $\vec{v} = (-1, 4, 5)$. Un vecteur normal est donné par $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = (-17, -13, 7)$. Donc $M(x, y, z) \in (P)$ si et seulement si $(x - 1, y, z - 2) \cdot (-17, -13, 7) = 0$, soit

$$-17x - 13y + 7z + 3 = 0.$$

Correction de l'exercice 2.7

1. On se donne le point $A(0, 0, 0)$ et la droite $(D) = \{(x, y, z) : x + y - z + 3 = 0 \text{ et } 4x - y + 2z = 0\}$. On vérifie facilement que $A \notin (D)$. Le plus simple est de déterminer deux points distincts de (D) et procéder comme ci-dessus. Soit $B(x, y, z) \in (D)$ tel que $x = 0$. On a donc $y = 2z$, et donc la première équation donne $z = -3$, d'où $B(0, -6, -3)$. De même, soit $C(x, y, z) \in (D)$, tel que $y = 0$. On a alors $z = -2x$, et la première équation donne $x = -1$, d'où $z = 2$, ce qui donne $C(-1, 0, 2)$. Un vecteur normal est obtenu en calculant $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = (0, -6, -3) \wedge (-1, 0, 2) = (-12, 3, -6)$, on peut donc prendre $\vec{n} = (4, -1, 2)$.

Finalement, $M(x, y, z) \in (P)$ si et seulement si $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$, qui donne

$$4x - y + 2z = 0.$$

2. On se donne le point $A(1, 1, 0)$ et la droite $(D) = \{(t, -1 + 2t, 1 - 3t), t \in \mathbb{R}\}$. On peut procéder comme précédemment, à savoir considérer deux points de la droite par exemple $B(0, -1, 1)$ et $C(1, 1, -2)$ (associés respectivement à $t = 0$ et $t = 1$), calculer $\vec{AB} = (-1, -2, 1)$ et $\vec{AC} = (0, 0, -2)$ et $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = (4, -2, 0)$, d'où le choix $\vec{n} = (2, -1, 0)$.

Finalement, $M(x, y, z) \in (P)$ si et seulement si $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$, qui donne $(x - 1, y - 1, z) \cdot (2, -1, 0) = 0$, soit

$$2x - y - 1 = 0.$$

Correction de l'exercice 2.8

Soit (D) la droite dans l'espace, définie par l'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= x(t) &= 1 + t\frac{\sqrt{6}}{6} \\ y &= y(t) &= t\frac{\sqrt{6}}{6} \\ z &= z(t) &= 2t\frac{\sqrt{6}}{6} \end{cases}$$

On déduit facilement de cette forme un vecteur directeur de la droite. En effet, ces trois équations s'écrivent sous la forme

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + t \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right),$$

d'où un vecteur directeur

$$\vec{d} = (1, 1, 2).$$

Soit la droite (Δ) , intersection des deux plans d'équations cartésiennes respectives :

$$x + y + z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x - y - 2 = 0.$$

De ces deux équations cartésiennes on déduit deux vecteurs normaux $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{n}_2 = (2, -1, 0)$ dont on vérifie qu'ils ne sont pas colinéaires. On en déduit un vecteur directeur de (Δ) en calculant $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = (1, 2, -3)$, soit

$$\vec{\delta} = (1, 2, -3).$$

On sait par ailleurs qu'en notant α l'angle aigu entre ces deux droites, on a $\vec{d} \cdot \vec{\delta} = \|\vec{d}\| \|\vec{\delta}\| \cos \alpha$. Calculons donc $\|\vec{d}\| = \sqrt{7}$, $\|\vec{\delta}\| = \sqrt{14}$, $\vec{d} \cdot \vec{\delta} = -3$. Par conséquent,

$$\cos(\alpha) = \frac{-3}{7\sqrt{2}}.$$

Correction de l'exercice 2.9

1. Deux vecteurs normaux pour (D_1) sont $(1, 1, 1)$ et $(1, -1, 1)$. Donc un vecteur directeur pour (D_1) est $\vec{d}_1 = (2, 0, -2)$. Avec le même raisonnement, un vecteur directeur pour (D_2) est $\vec{d}_2 = (1, 0, -1)$. Donc les deux droites sont parallèles. Pour montrer qu'elles ne sont pas confondues, soit $A(1, 3, 0) \in (D_1)$. On vérifie bien que $A \notin (D_2)$, les deux droites ne sont donc pas confondues.
2. Pour démontrer que (D_2) et (D_3) ne se coupent pas, supposons qu'il existe un point d'intersection $M(x, y, z)$. x, y et z doivent satisfaire les deux systèmes d'équations cartésiennes des deux droites. Donc $y = 3$ et $z = 1 - x$. En reportant dans la seconde équation de (D_3) , on obtient $x = 1 + 2y = 7$, d'où $z = -6$. En vérifiant la première équation de (D_3) , il vient $2x - y + z = 14 - 3 - 6 = 5 \neq 3$, d'où une contradiction. Il n'y a donc pas de solution, et l'intersection de (D_2) et (D_3) est donc vide.
3. Là encore, supposons qu'il existe un point d'intersection $M(x, y, z)$. x, y et z doivent satisfaire les deux systèmes d'équations cartésiennes des deux droites. D'après les équations de (D_3) , on a $x = 1 + 2y$ et $2(1 + 2y) - y + z = 3$ d'où $z = 1 - 3y$. En reportant dans la seconde équation de (D_1) , on obtient $1 + 2y - y + 1 - 3y = 0$, d'où $y = 1$, et donc $x = 3$ et $z = -2$.
Il reste à vérifier que $(x, y, z) = (3, 1, -2)$ est bien solution des deux systèmes à la fois, ce qui se fait directement.

Correction de l'exercice 2.10

Soit (P) le plan d'équation $2x - y + z = 3$ et soit (D) une droite dirigée par $\vec{u} = (1, 3, 1)$.

1. Un vecteur normal au plan est $\vec{n} = (2, -1, 1)$. La droite est parallèle au plan si et seulement si $\vec{n}$ est normal à la droite. Calculons $\vec{n} \cdot \vec{u} = 2 - 3 + 1 = 0$. La droite (D) est donc parallèle à (P) .
2. La droite (D) ne peut donc être orthogonale à (P) .
3. Une droite dirigée par le vecteur $\vec{v} = (-2, 1, -1)$ est orthogonale à (P) car $\vec{v} = -\vec{n}$.
4. Il est clair que $A \in (P)$. Par ailleurs, $\vec{w} \perp \vec{n}$, donc tous les points M tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{w}$ appartiennent au plan. Ces points définissent la droite, elle est donc incluse dans le plan.

Correction de l'exercice 2.11

On se donne, dans $\mathbb{R}^3$, le plan (P) , défini par les points $A = (1, 1, 1)$, $B(0, 2, 0)$ et $C(0, -1, 1)$. Calculons $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, -1)$ et $\overrightarrow{AC} = (-1, -2, 0)$. Ces deux vecteurs forment une base du plan (P) . Un vecteur orthogonal au plan peut être obtenu en calculant $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-2, 1, 3)$. De là, la caractérisation de (P) par un point et un vecteur normal donne la relation suivante : $M(x, y, z) \in (P)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, soit $-2(x - 1) + (y - 1) + 3(z - 1) = 0$, d'où l'équation cartésienne

$$-2x + y + 3z - 2 = 0.$$

Correction de l'exercice 2.12

1. Soit (P) le plan de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation cartésienne $x + y + 2z + 1 = 0$. On peut par exemple poser

$$x = x(t, s) = t, \quad y = y(t, s) = s, \quad z = z(t, s) = -\frac{t}{2} - \frac{s}{2} - \frac{1}{2}.$$

Au passage, cette équation paramétrique est naturellement associée à la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ où

$$\vec{u} = (1, 0, -1/2), \quad \vec{v} = (0, 1, -1/2).$$

2. Soit (P) le plan de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation paramétrique

$$x = x(t) = 1 + t + s, \quad y = y(t) = t - s, \quad z = z(t) = -1 + 2t - s.$$

On peut obtenir une équation cartésienne de (P) en éliminant les paramètres de ces équations, par exemple en écrivant la première égalité sous la forme $s = x - t - 1$, et en reportant dans la seconde égalité, qui donne $t = y + s = y + x - t - 1$ d'où $t = (x + y - 1)/2$ et donc $s = x - 1 - (x + y - 1)/2 = (x - y - 1)/2$. La troisième égalité donne donc $z = -1 + (x + y - 1) - (x - y - 1)/2 = (x + 3y - 3)/2$, d'où l'équation cartésienne

$$x + 3y - 2z - 3 = 0.$$

Une autre approche consiste à déduire de l'équation paramétrique une base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ du plan, avec par exemple $\vec{u} = (1, 1, 2)$ et $\vec{v} = (1, -1, -1)$. On en déduit un vecteur normal $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = (1, 3, -2)$. Une équation cartésienne est donc de la forme $x + 3y - 2z + d = 0$ où d reste à déterminer. Pour cela, notons que $A(1, 0, -1) \in (P)$, qui donne en reportant dans l'équation cartésienne $1 + 0 - 2 + d = 0$, soit $d = -3$, ce qui redonne la même équation cartésienne.

Correction de l'exercice 2.13

1. Le point de la droite (D) le plus proche de A est le projeté orthogonal A_0 de A sur (D) . Soit M_0 un point quelconque de (D) . On peut décomposer $\overrightarrow{AM_0} = \overrightarrow{AA_0} + \overrightarrow{A_0M_0}$, de sorte que $\vec{v} \wedge \overrightarrow{AM_0} = \vec{v} \wedge \overrightarrow{AA_0}$ et la norme de $\vec{v} \wedge \overrightarrow{AM_0}$ est égale à $\|\vec{v}\| \cdot \|\overrightarrow{AA_0}\|$. Comme la distance de A à (D) est égale à la norme de $\overrightarrow{AA_0}$, on en déduit

$$d(A, (D)) = \frac{\|\vec{v} \wedge \overrightarrow{AM_0}\|}{\|\vec{v}\|}$$

2. (D) admet comme vecteurs normaux $\vec{n}_1 = (-2, 1, -3)$ et $\vec{n}_2 = (1, 0, 1)$. Un vecteur directeur est donc $\vec{d} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = (1, -1, -1)$, de norme $\|\vec{d}\| = \sqrt{3}$. Prenons $M_0 \in (D)$, par exemple $M_0(0, 4, 1)$. On a alors $\overrightarrow{AM_0} = (-1, 2, -2)$ et $\vec{d} \wedge \overrightarrow{AM_0} = (0, 1, 1)$, et $\|\vec{d} \wedge \overrightarrow{AM_0}\| = \sqrt{2}$. Par conséquent, on obtient $d(A, (D)) = \sqrt{2/3}$.

Correction de l'exercice 2.14

1. Dans l'espace, on considère le point $A(1, 0, 2)$ et le plan $(P) = \{(x, y, z) : 2x + y + z + 4 = 0\}$. D'après le cours on sait que la distance entre A et (P) est donnée par

$$d(A, (P)) = \frac{|1 \times 2 + 0 \times 1 + 2 \times 1 + 0|}{2^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

2. Dans l'espace, on considère le point $A(3, 2, 1)$ et le plan $(P) = \{(x, y, z) : -x + 5y - 4z = 5\}$. D'après le cours on sait que la distance entre A et (P) est donnée par

$$d(A, (P)) = \frac{|-1 \times 3 + 5 \times 2 - 4 \times 1 - 5|}{(-1)^2 + 5^2 + (-4)^2} = \frac{2}{42} = \frac{1}{21}.$$

Correction de l'exercice 2.15

Soient (P_1) et (P_2) les plans de l'espace d'équations cartésiennes respectives :

$$(P_1) : 2x + y - z + 3 = 0, \quad \text{et} \quad (P_2) : -x + z = 0.$$

Soit α l'angle aigu entre ces deux plans. On note $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ les vecteurs normaux de (P_1) et (P_2) respectivement. On suppose que $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont de norme 1, et ont leur première coordonnée positive.

1. Les vecteurs $\vec{u}_1 = (2, 1, -1)$ et $\vec{u}_2 = (1, 0, -1)$ sont normaux aux deux plans considérés, et ont leur première coordonnée positive. Pour les normaliser, il suffit de calculer

$$\vec{n}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \frac{\vec{u}_1}{\sqrt{6}} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}} \right), \quad \vec{n}_2 = \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|} = \frac{\vec{u}_2}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right).$$

2. L'angle α entre (P_1) et (P_2) peut être défini comme suit. Si $(D) = (P_1) \cap (P_2)$, soit (P_3) un plan perpendiculaire à (D) . Etant donnés $O = (P_1) \cap (P_2) \cap (P_3)$, $A_1 \in (P_1) \cap (P_3)$ et $A_2 \in (P_2) \cap (P_3)$, l'angle entre (P_1) et (P_3) est l'angle $(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2})$ (les points A_1 et A_2 peuvent être choisis de sorte que l'angle soit aigu). Soient maintenant $B_1, B_2 \in (P_3)$ tels que $\overrightarrow{OB_1} = \vec{n}_1$ et $\overrightarrow{OB_2} = \vec{n}_2$. On a alors $(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OB_1}) = \pi/2$ et $(\overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OB_2}) = \pi/2$, d'où $(\overrightarrow{OB_1}, \overrightarrow{OB_2}) = \alpha$.

3. Pour en déduire $\sin(\alpha)$, il faut se souvenir que $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$. Donc

$$\sin \alpha = \|\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2\| = \frac{1}{\sqrt{12}} \|(-1, 1, -1)\| = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2}.$$

Donc $\alpha = \pi/3$.

Correction de l'exercice 2.16

Dans le plan, on considère le cercle de centre $I(1, -1)$ et de rayon 2. Une équation cartésienne est

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0.$$

Une équation paramétrique est

$$x = x(t) = 1 + 2 \cos t, \quad y = y(t) = -1 + 2 \sin t, \quad t \in [0, 2\pi[.$$

Correction de l'exercice 2.17

Soit OO' un diamètre du cercle passant par O , soit M un point du cercle, et notons θ l'angle entre OM et OO' . Le triangle OMO' est rectangle en M . On a $OM = OO' \cos \theta$ et $O'M = OO' \sin \theta$. On a donc

$$\rho = OM \sin \theta - O'M \cos \theta = 0 .$$

Correction de l'exercice 2.18

Soient $A(1, 2)$ et $B(-1, 3)$ dans le plan repéré. Soit $M(x, y)$. Soit $I(0, 5/2)$ le milieu de $[AB]$, notons $R = AB/2$. On a alors

$$0 = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}) \cdot (\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}) = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BI} + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI}) \cdot \overrightarrow{IM} + \|\overrightarrow{IM}\|^2 = \|\overrightarrow{IM}\|^2 - R^2 ,$$

ce qui permet de conclure que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$ est le cercle de centre I et de diamètre $AB = 2R$.

Ecrivons aussi

$$0 = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = (x-1, y-2) \cdot (x+1, y-3) = x^2 - 1 + y^2 - 5y + 6 = x^2 + y^2 - 5y + 5 .$$

On reconnaît là l'équation cartésienne d'un cercle de centre $I(0, 5/2)$.

Correction de l'exercice 2.19

Soit a un nombre réel fixé. Pour montrer que l'équation polaire de la droite verticale passant par $A(a, 0)$ est de la forme $\rho = a/\cos \theta$, il suffit de faire un dessin, on voit directement que $\rho = a \cos \theta$.

Correction de l'exercice 2.20

On considère les trois points de l'espace suivants $A(0, 1, 0)$, $B(-1, 1, 0)$ et $C(-1, 1, 1)$.

1. Calculons $\overrightarrow{AB} = (-1, 0, 0)$ et $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$. Les trois points ne sont donc pas alignés.
2. Soit α l'angle aigu et non-orienté entre les droites (AB) et (AC) . Calculons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$. Comme $\|\overrightarrow{AB}\| = 1$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2}$, on a $\cos(\alpha) = 1/\sqrt{2}$, donc $\alpha = \pi/4$.
3. Calculons un vecteur normal du plan : $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (0, 1, 0)$.
4. Une équation cartésienne du plan est donc $y + d = 0$, où d est à déterminer. Comme $A \in (P)$, on voit que $d = -1$, d'où l'équation $y - 1 = 0$.
5. Pour calculer la distance $d(D, (P))$ où $D(1, 0, 1)$, il suffit d'utiliser la formule

$$d(D, (P)) = \frac{|0 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 1 + 1|}{\sqrt{0 + 1 + 0}} = 1 .$$

6. De l'équation cartésienne de (P) on déduit le vecteur normal $\vec{n} = (0, 1, 0)$, $\vec{n}$ est aussi un vecteur directeur de (Δ) . On a donc $M(x, y, z) \in (\Delta)$ si et seulement si $\overrightarrow{DM} = t\vec{n}$ pour $t \in \mathbb{R}$, soit donc

$$x = 1, \quad y = t, \quad z = 1 .$$

7. L'aire du triangle ABC s'obtient à partir du produit vectoriel

$$\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \|(0, 1, 0)\| = \frac{1}{2} .$$

3 Transformations du plan

Correction de l'exercice 3.0

1. Soit f la similitude directe de centre $A(1, 1)$, d'angle $\theta = \pi/3$ et de rapport $\lambda = 2$. f est donc la composition de la rotation $r_{\pi/3}^A$ de centre A et d'angle θ , et de l'homothétie h_2^A de centre A et de rapport 2. Soit $M(x, y)$ un point quelconque du plan. Si $M'(x', y') = r_{\pi/3}^A(M)$ on a

$$\begin{cases} x' &= 1 + (x-1)/2 - (y-1)\sqrt{3}/2 \\ y' &= 1 + (x-1)\sqrt{3}/2 + (y-1)/2 \end{cases}$$

Si maintenant on note $M''(x'', y'') = h_2^A(M')$ on a

$$\begin{cases} x'' &= 1 + 2(x'-1) &= 1 + (x-1) - (y-1)\sqrt{3} &= x - (y-1)\sqrt{3} \\ y'' &= 1 + 2(y'-1) &= 1 + (x-1)\sqrt{3} + (y-1) &= (x-1)\sqrt{3} + y \end{cases}$$

2. Soit g la translation du plan de vecteur $\vec{u} = (2, 1)$. Soit $M(x, y)$
 — Calculons $U(u, v) = g(M)$, on a $u = x + 2$ et $v = y + 1$. Soit maintenant $U'(u', v') = f(U)$. Cette fois, on a $u' = u - (v - 1)\sqrt{3} = (x + 2) - y\sqrt{3}$ et $v' = (u - 1)\sqrt{3} + v = (x + 1)\sqrt{3} + (y + 1)$, donc

$$f \circ g : M(x, y) \mapsto V(x - y\sqrt{3} + 2, x\sqrt{3} + y + (1 + \sqrt{3})) .$$

— Calculons maintenant

$$g \circ f : M(x, y) \mapsto V(x - y\sqrt{3} + (2 + \sqrt{3}), x\sqrt{3} + y + (1 - \sqrt{3})) .$$

On voit bien que $f \circ g \neq g \circ f$.

3. Soit (D_1) la droite du plan d'équation $y = 3x$, un vecteur directeur est $\vec{d} = (1, 3)$. Soit $M(x, y)$ son projeté orthogonal est le point $H(x_0, y_0) \in (D_1)$ tel que $\vec{d} \cdot \overrightarrow{HM} = 0$. Ceci donne $(x - x_0) + 3(y - y_0) = 0$, et comme $y_0 = 3x_0$ on obtient donc

$$x_0 = (x + 3y)/10 \quad \text{et} \quad y_0 = 3(x + 3y)/10 .$$

De là on déduit l'image $M'(x', y') = s_{(D_1)}(M)$ de M par la symétrie : $x' = 2x_0 - x$ et $y' = 2y_0 - y$ donnent

$$x' = \frac{-4x + 3y}{10} , \quad y' = \frac{3x + 4y}{10} .$$

Calculons maintenant $x - x_0 = (9x - 3y)/10$ et $y - y_0 = (y - 3x)/10$. De là,

$$HM = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{\frac{81x^2 + 9y^2 - 54xy + 9x^2 + y^2 - 6xy}{100}} = \sqrt{\frac{(3x - y)^2}{10}} = \frac{|3x - y|}{\sqrt{10}} .$$

Donc,

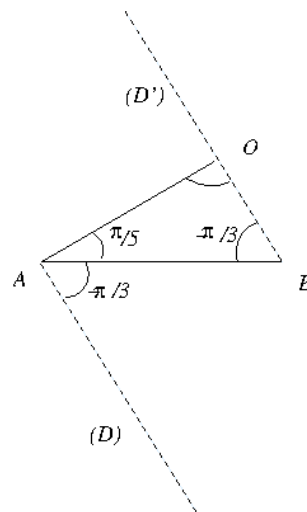
$$d(M_1, (D_1)) = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} .$$

4. On considère 3 points O, A et B du plan tels que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OB}) = -3\pi/10$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = \pi/5$. Soit (D) la droite passant par A faisant un angle de $-\pi/3$ avec $\overrightarrow{AB}$. Le point O se trouve sur la droite (D') parallèle à (D) passant par B . Plus précisément il se trouve sur l'intersection de (D') avec la droite faisant un angle de $\pi/5$ avec $\overrightarrow{AB}$.

L'angle (non orienté) $\widehat{ABO}$ vaut donc $\widehat{ABO} = \pi/3$. Comme la somme des angles du triangle (ABO) vaut π , on a donc $\widehat{BOA} = \pi - \pi/3 - \pi/5 = 7\pi/15$.

L'angle de la similitude directe s de centre O telle que $s(A) = B$ vaut donc

$$\theta = \pi/5 .$$



5. On considère la similitude s qui transforme le point $A(5, -13)$ en $C(-1, -12)$ et le point $B(6, -15)$ en $D(1, 12)$. Le rapport de la similitude est obtenu en calculant CD/AB . Comme $AB = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$ et $CD = \sqrt{4 + 576} = \sqrt{580} = 2\sqrt{5} \times 29$, on obtient le rapport

$$\rho = \frac{CD}{AB} = 2\sqrt{29} .$$

6. On considère deux symétries s_1 et s_2 d'axes respectifs (D_1) et (D_2) . Il faut considérer deux cas :
 a) Si (D_1) et (D_2) sont sécantes, notons $A = (D_1) \cap (D_2)$. Pour tout point M du plan, notons M' son image par s_1 et H sa projection orthogonale sur (D_1) . Clairement, (D_1) est la bissectrice du triangle MOM' , donc $\widehat{MOH} = \widehat{HOM'}$. De même, notons M'' l'image de M' par s_2 et H' sa projection orthogonale sur (D_2) . (D_2) est la bissectrice du triangle $M'OM''$, donc $\widehat{M'OH'} = \widehat{H'OM''}$. On a donc $\widehat{MOM'} = 2\widehat{HOH'}$, qui n'est autre que l'angle $\theta = ((D_1), (D_2))$ entre les droites (D_1) et (D_2) , qui ne dépend pas de M . Donc $s_2 \circ s_1$ est la rotation $s_2 \circ s_1 = r_\theta$.

b) Si (D_1) et (D_2) sont parallèles, non confondues, avec les mêmes notations que ci-dessus, les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{MM''}$ sont colinéaires. Par ailleurs, $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{HM'} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{M'H'} = 2\overrightarrow{HH'}$ ne dépend pas de M . C'est donc une translation de vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{HH'}$.

7. On considère deux rotations r_1 et r_2 d'angles respectifs θ_1 et θ_2 .

8. Dans le plan on considère deux segments $[AC]$ et $[BD]$ tels que $AC = BD$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = -\pi/2 \pmod{2\pi}$. On appelle (C_1) , (C_2) , (C_3) et (C_4) les cercles de diamètres respectifs $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

a) Soit r la rotation qui transforme A en B et C en D . r transforme $[AC]$ en $[BD]$, son angle vaut $\theta = -\pi/2$. Par ailleurs, $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = -\pi/2$, donc I est sur le cercle de diamètre $[AB]$, qui est (C_1) . De même, $(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{ID}) = -\pi/2$, et I est donc sur le cercle de diamètre $[CD]$, à savoir (C_3) . Par conséquent,

$$I \in (C_1) \cup (C_3) .$$

b) Soit r' la rotation qui transforme A en D et C en B . r' transforme AC en DB , donc son angle vaut $\theta' = \pi/2$. Par ailleurs, $(\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JD}) = \pi/2$, donc J est sur le cercle de diamètre $[AD]$, qui est (C_2) . De même, $(\overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JC}) = \pi/2$, et J est donc sur le cercle de diamètre $[BC]$, à savoir (C_4) . Par conséquent,

$$J \in (C_2) \cup (C_4) .$$

c) On désigne par M le milieu de $[AC]$ et par N celui de $[BD]$. Les rotations r et r' transforment $[AC]$ en $[BD]$. Le milieu M de $[AC]$ est transformé en N milieu de $[BD]$. Pour r : $IN = IM$ et l'angle $\widehat{MIN}$ est droit. Pour r' : $JN = JM$ et l'angle $\widehat{MJN}$ est droit. Les points I et J sont les intersections de la médiatrice de $[MN]$ avec le cercle diamètre $[MN]$. $INJM$ est un carré.

d) On désigne par P et R les points diamétralement opposés à I sur, respectivement, (C_1) et (C_3) et par Q et S les points diamétralement opposés à J sur, respectivement, (C_2) et (C_4) .

Soit s la similitude directe de centre I , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\pi/4$. Quelles sont les images par s des points D , N , B ?

La similitude s transforme B , N , D en P , J , R . Comme N est le milieu de $[BD]$, J est alors le milieu de $[PR]$.

9. Soient h une homothétie de rapport k et h' une homothétie de rapport k' et de centres respectifs O et O' .

a) Soit t une translation de vecteur $\vec{u} = (a, b)$. Calculons la composée $h \circ t$. Soient $M(x, y)$, $M'(x', y') = t(M)$ et $M''(x'', y'') = h(M')$. On a alors

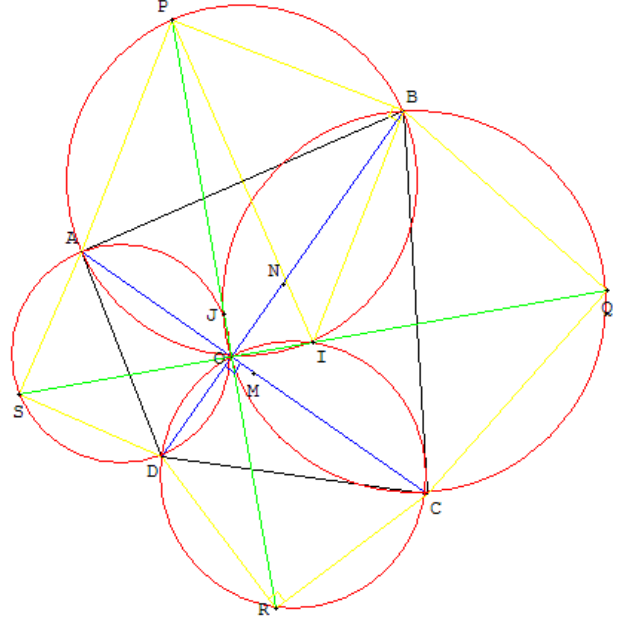
$$\begin{aligned} x'' &= x_0 + k(x' + a) = x_0 + k(x - x_0 + a) \\ y'' &= y_0 + k(y' + b) = y_0 + k(y - y_0 + b) \end{aligned}$$

Montrons que x'' et y'' sont de la forme requise, $x'' = \alpha + \lambda(x - \alpha)$ et $y'' = \beta + \lambda(y - \beta)$. Par identification, on trouve

$$\lambda = k, \quad \alpha = \frac{(k-1)x_0 + ka}{k-1}, \quad \beta = \frac{(k-1)y_0 + kb}{k-1},$$

il s'agit bien d'une homothétie de rapport k et de centre $O(\alpha, \beta)$. Calculons maintenant $t \circ h$: soient $M(x, y)$, $M'(x', y') = h(M)$ et $M''(x'', y'') = t(M')$. On a alors

$$\begin{aligned} x'' &= x' + a = x_0 + k(x - x_0) + a \\ y'' &= y' + b = y_0 + k(y - y_0) + b \end{aligned}$$



De nouveau, par identification, on retrouve une homothétie de rapport λ et de centre $O(\alpha, \beta)$, avec

$$\lambda = k, \quad \alpha = \frac{(k-1)x_0 + a}{k-1}, \quad \beta = \frac{(k-1)y_0 + b}{k-1}.$$

- b) Si $kk' \neq 1$, notons $O(x_0, y_0)$ et $O'(x'_0, y'_0)$ les centres des homothéties, et calculons $h \circ h'$. Soient $M(x, y)$ et $M'(x', y') = (h \circ h')(M)$, le calcul donne

$$\begin{aligned} x' &= x_0 + k[x'_0 + k'(x - x'_0) - x_0] \\ y' &= y_0 + k[y'_0 + k'(y - y'_0) - y_0] \end{aligned}$$

Il s'agit bien d'une homothétie de rapport kk' . Cherchons son centre $\Omega(\alpha, \beta)$. On écrit $x' = \alpha + k(x - \alpha)$ et $y' = \beta + k(y - \beta)$, par identification on trouve

$$\alpha = \frac{(1-k)x_0 + kx'_0(1-k')}{1-kk'}, \quad \beta = \frac{(1-k)y_0 + ky'_0(1-k')}{1-kk'}.$$

Pour montrer que O , O' et Ω sont alignés, calculons

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O\Omega} &= \left(\frac{(1-k)x_0 + kx'_0(1-k')}{1-kk'} - x_0, \frac{(1-k)y_0 + ky'_0(1-k')}{1-kk'} - y_0 \right) \\ &= \frac{k(1-k')}{1-kk'} (x'_0 - x_0, y'_0 - y_0) = \frac{k(1-k')}{1-kk'} \overrightarrow{OO'}. \end{aligned}$$

Les centres sont bien alignés.

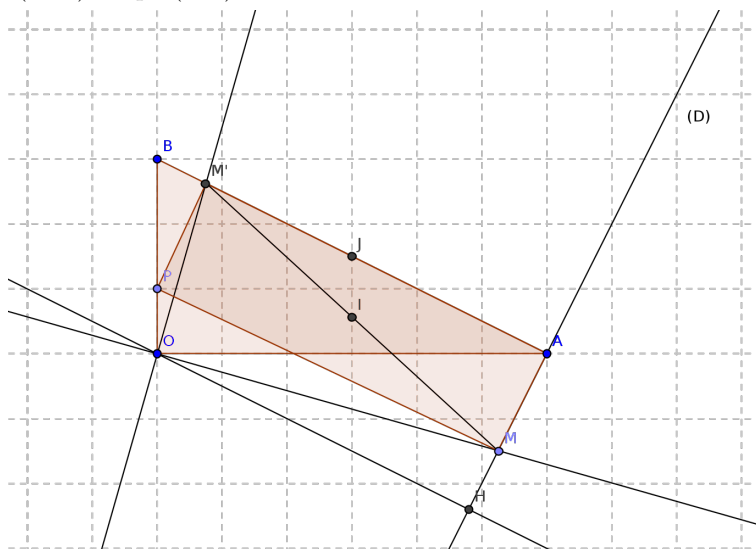
- c) Si $kk' = 1$, le même calcul que ci-dessus conduit à

$$x' = x + (1-k)(x_0 - x'_0), \quad y' = y + (1-k)(y_0 - y'_0),$$

$h \circ h'$ est donc une translation de vecteur

$$\vec{u} = (1-k)\overrightarrow{OO'}.$$

Correction de l'exercice 3.1 - Dans le plan orienté, on considère un triangle OAB direct et rectangle en O . On désigne par J le milieu de $[AB]$. M est un point variable de la droite (D) perpendiculaire en A à (AB) . La perpendiculaire en O à (OM) coupe (AB) en M' .



Exercice 3.1

1. Soit s la similitude de centre O telle que $s(A) = B$.

- a) Montrons que, pour point $M \in (D)$, $s(M) = M'$.

Les droites (OA) et (OB) sont orthogonales avec $(OA, OB) = \pi/2$, donc s est la similitude de centre O , d'angle $\pi/2$ et de rapport OB/OA . Posons $N = s(M)$. (OM) et (ON) sont aussi perpendiculaires. Donc O , M' et N sont alignés..

De plus, les droites (AM) et (BN) sont orthogonales (car l'angle de s est $\pi/2$), donc $N \in (AB)$. N est donc sur (AB) et sur la droite (OM') perpendiculaire à (OM) , donc $N = M'$ et on a bien $s(M) = M'$.

- b) Le triangle OMM' est rectangle en O . De plus, les rapports OB/OA et OM'/OM sont égaux. (C'est simplement le rapport de la similitude s). Donc les triangles OMM' et OAB sont semblables.
2. a) OMM' et OAB sont semblables. Soient J le milieu de $[AB]$ et I le milieu de $[MM']$. Les triangles OMI et OAJ sont semblables.
Si S est la similitude de centre O telle que $S(A) = J$ alors $S(M) = I$. L'angle de S est $\widehat{OAJ}$ et son rapport est OJ/OA .
- b) En particulier, si M est le projeté orthogonal de O sur (D) , alors le quadrilatère $OMAM'$ est un rectangle. Le milieu de $[MM']$ est alors égal au milieu de $[OA]$. Donc, dans ce cas, l'image de M par S est le milieu de $[OA]$.
- c) Si M décrit (D) alors $S(M)$ décrit une droite (l'image par une similitude d'une droite est une droite). Or, $S(A) = J$ et $S(H)$ est le milieu de $[OA]$. Donc la droite décrite par $S(M)$ est la droite (JK) , où K est le milieu de $[OA]$, c'est à dire la médiatrice de $[OA]$.
3. Pour tout point M de (D) distinct de A , on désigne par P le point tel que $MAM'P$ est un rectangle. Déterminer le lieu géométrique du point P lorsque M décrit $(D) - \{A\}$.
Il suffit de voir que $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AI}$. Soit t l'homothétie de centre A et de rapport 2. Alors $P = (t \circ S)(M)$, où S est la similitude de la question 2. $t \circ S$ est aussi une similitude. L'image de (D) par $t \circ S$ est une droite. Or : $(t \circ S)(A) = B$ et $(t \circ S)(H) = O$. Donc l'image de (D) est la droite (OB) . Par conséquent, si M décrit $(D) - \{A\}$ alors P décrit la droite $(OB) - \{B\}$.

Correction de l'exercice 3.2

Soit f la rotation de centre $I(-2, 0)$ et d'angle $\pi/3$. Soit (C) le cercle de centre $A(0, 2)$ et de rayon 4. Soit (D) la droite passant par $B(-1, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (1, 1)$.

1. Donner l'expression de f . Soit $M(x, y)$, soit $M'(x', y') = f(M)$. D'après le cours, on a

$$\begin{cases} x' &= -2 + \frac{1}{2}(x+2) - \frac{\sqrt{3}}{2}y &= \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - 1 \\ y' &= \frac{\sqrt{3}}{2}(x+2) + \frac{1}{2}y &= \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \sqrt{3} \end{cases}$$

Pour trouver l'équation cartésienne de (D) on note que $\vec{n} = (1, -1)$ est un vecteur normal, et on écrit que $M(x, y) \in (D)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, soit $(x+1) - y = 0$, donc

$$x - y + 1 = 0 .$$

L'équation cartésienne de (C) est $x^2 + (y-2)^2 = 16$, soit

$$x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0 .$$

2. Calculons les images de (C) et (D) par f . A priori on s'attend à ce que l'image du cercle soit un cercle, et que l'image de la droite soit une autre droite. Reste à le montrer.

Pour cela on peut écrire

$$\begin{cases} x &= -2 + \frac{1}{2}(x'+2) + \frac{\sqrt{3}}{2}y' &= \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' - 1 \\ y &= -\frac{\sqrt{3}}{2}(x'+2) + \frac{1}{2}y' &= -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' - \sqrt{3} \end{cases}$$

et insérer dans l'équation cartésienne de (D) et (C) . Commençons par (D) . L'équation cartésienne de (D) donne

$$\left(\frac{x'}{2} + \frac{y'\sqrt{3}}{2} - 1 \right) - \left(-\frac{x'\sqrt{3}}{2} + \frac{y'}{2} - \sqrt{3} \right) + 1 = 0 ,$$

qui équivaut, après réarrangement, à

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) x' + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) y' + \sqrt{3} = 0 ,$$

qui est l'équation d'une droite. On peut noter qu'un vecteur directeur et un vecteur normal de cette droite sont donnés par

$$\vec{d}' = (1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}) , \quad \vec{n}' = (1 + \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}) .$$

Remarque : si on veut connaître l'angle α entre les deux droites, il suffit de calculer le produit scalaire de deux vecteurs normaux. Le calcul donne

$$\|\vec{n}\| = \|\vec{n}'\| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \vec{n} \cdot \vec{n}' = 1, \quad \text{d'où} \quad \cos(\alpha) = \frac{1}{2}.$$

L'angle est donc égal à $\alpha = \pi/3$, ce qui est l'angle de la rotation.

Pour le cercle, les calculs sont un peu plus longs. On insère les valeurs de x et y dans l'équation cartésienne du cercle, ce qui donne

$$\left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' - 1\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' - \sqrt{3} - 2\right)^2 = 16$$

Passons maintenant aux expressions complexes, on va voir qu'elles simplifient les calculs.

- a) L'expression complexe de la rotation est comme suit : $r : z \rightarrow z' = z_\Omega + e^{i\alpha}(z - z_\Omega)$, où Ω est le centre et α l'angle. Soit maintenant un cercle de centre A et de rayon R . En remplaçant z par son expression en fonction de z' , l'équation cartésienne devient

$$|z_\Omega + e^{-i\alpha}(z' - z_\Omega) - z_A|^2 = R^2 \iff |z' - (z_\Omega + e^{i\alpha}(z_A - z_\Omega))|^2 = R^2,$$

et on reconnaît là l'équation cartésienne d'un cercle de rayon R et de centre A' d'affixe

$$z_{A'} = z_\Omega + e^{i\alpha}(z_A - z_\Omega).$$

On peut voir que A' est l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle α .

- b) L'équation d'une droite dans le plan complexe est de la forme

$$\omega \bar{z} + \bar{\omega} z + k = 0,$$

où $\omega \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{R}$. Si z' est l'image de z par la rotation de centre Ω et d'angle α , on a $z' = z_\Omega + e^{i\alpha}(z - z_\Omega)$, et $z = z_\Omega + e^{-i\alpha}(z' - z_\Omega)$.

De là, l'équation cartésienne de la droite dans le plan complexe s'écrit

$$\omega (\bar{z}_\Omega + e^{i\alpha}(\bar{z}' - \bar{z}_\Omega)) + \bar{\omega} (z_\Omega + e^{-i\alpha}(z' - z_\Omega)) + k = 0,$$

qui s'écrit aussi

$$\omega' \bar{z}' + \bar{\omega}' z' + k' = 0,$$

où

$$\omega' = \omega e^{i\alpha}, \quad \text{et} \quad k' = k + \omega \bar{z}_\Omega (1 - e^{i\alpha}) + \bar{\omega} z_\Omega (1 - e^{-i\alpha})$$

L'image d'une droite (D) est donc une droite (D') . Par ailleurs, on sait que $\omega = a + ib$ est l'affixe d'un point $N(a, b)$ tel que $\overrightarrow{ON} = \vec{n} = (a, b)$ est un vecteur normal à (D) . De même,

$$\omega' = \omega e^{i\alpha} = [a \cos \alpha - b \sin \alpha] + i[a \sin \alpha + b \cos \alpha]$$

est l'affixe d'un point N' tel que $\overrightarrow{ON'} = \vec{n}'$ est normal à (D') . On voit facilement que N' est l'image de N par rotation d'angle α autour de l'origine, donc l'angle entre $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ est égal à α . Donc l'angle entre (D) et (D') est bien l'angle de la rotation.

3. Soit h une homothétie de rapport r . Etant donnés $M(x, y)$ et $M'(x', y') = h(M)$, d'affixes respectives z et z' , on a

$$z' = z_\Omega + r(z - z_\Omega),$$

où z_Ω est l'affixe du centre Ω de l'homothétie.

- a) Considérons un cercle de centre A (affixe z_A) et rayon R . Son équation dans le plan complexe est de la forme

$$|z - z_A|^2 = R^2.$$

On a aussi $z = z_\Omega + r^{-1}(z' - z_\Omega)$, en remplaçant dans l'équation cartésienne on obtient

$$|z_\Omega + r^{-1}(z' - z_\Omega) - z_A|^2 = R^2 \iff |z' - [z_\Omega + r(z_A - z_\Omega)]|^2 = (rR)^2,$$

qui est l'équation d'un cercle de centre A' d'affixe $z_{A'} = z_\Omega + r(z_A - z_\Omega)$, et de rayon rR . On peut noter que le nouveau centre A' est l'image de A par l'homothétie.

b) Considérons maintenant une droite d'équation

$$\bar{\omega}z + \omega\bar{z} + k = 0$$

dans le plan complexe. Remplaçons z par l'expression précédente $z = z_\Omega + r^{-1}(z' - z_\Omega)$, on obtient

$$\bar{\omega}[z_\Omega + r^{-1}(z' - z_\Omega)] + \omega[\bar{z}_\Omega + r^{-1}(\bar{z}' - \bar{z}_\Omega)] + k = 0 ,$$

qui s'écrit aussi

$$\bar{\omega}'z + \omega'\bar{z} + k' = 0 ,$$

avec

$$\omega' = r^{-1}\omega , \quad \text{et} \quad k' = k + \bar{\omega}(1 - r^{-1})z_\Omega + \omega(1 - r^{-1})\bar{z}_\Omega$$

4. Une similitude directe est la composée d'une rotation et d'une homothétie. Donc, l'image d'un cercle par une similitude directe est un cercle, et l'image d'une droite est une droite. Plus précisément, on peut refaire les mêmes calculs que ci-dessus, et on obtient les résultats suivants :

- a) L'image d'un cercle de centre A et de rayon R par la similitude directe de centre Ω , de rapport r et d'angle α est le cercle de rayon rR et de centre A' , image de A par la similitude :

$$z_{A'} = z_\Omega + re^{i\alpha}(z_A - z_\Omega) .$$

- b) L'image d'une droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$ par la similitude directe de centre Ω , de rapport r et d'angle α est la droite d'équation

$$a'x + b'y + c' = 0 ,$$

où on a posé

$$\omega' = a' + ib' = r^{-1}e^{-i\alpha}\omega = r^{-1}e^{-i\alpha}(a + ib) ,$$

et

$$c' = 2k' = 2(k + \bar{\omega}(1 - r^{-1}e^{-i\alpha})z_\Omega + \omega(1 - r^{-1}e^{i\alpha})\bar{z}_\Omega) = c + 4\Re((\omega - \omega')\bar{z}_\Omega)$$

5. Soit $M(x, y)$ un point de l'intersection de (D) et (C) . On a donc $y = x + 1$. En insérant cette expression dans l'équation cartésienne du cercle on obtient l'équation

$$2x^2 + 2x - 15 = 0 .$$

Le discriminant vaut $\Delta = 4 + 60 = 64$, les racines sont donc $x = -5/2$ et $x = 3/2$. Les solutions sont donc

$$(-5/2, -3/2) , \quad (3/2, 5/2) .$$

6. Soit g la similitude de centre A , de rapport 2 et d'angle $\pi/6$. L'expression de g est la suivante : en polaire

$$g : z \rightarrow z' = g(z) = 2i + 2e^{i\pi/6}(z - 2i) ,$$

qui se traduit par l'expression cartésienne

$$\begin{cases} x' &= x\sqrt{3} - (y - 2) \\ y' &= x + (y - 2)\sqrt{3} + 2 \end{cases}$$

- a) (C) est le cercle de centre $A(0, 2)$ et de rayon $R = 4$. On sait que l'image de (C) par g est un cercle, de rayon 8 et dont le centre A' est l'image de A par la similitude. En notant $A'(u, v)$ on a $u = 0$ et $v = 2$, donc $A' = A$.

- b) (D) est la droite d'équation $x - y + 1 = 0$. Donc $\omega = 1 - i$ et

$$\omega' = \frac{1}{2}e^{-i\pi/6}(1 - i) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\pi/6}e^{-i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-5i\pi/12} .$$

Correction de l'exercice 3.3

Soient C_1 le cercle de centre l'origine O , et de rayon 2, et C_2 le cercle de centre $A(2, 0)$ et de rayon 4. Soit D la droite d'équation cartésienne $x - 2 = 0$. Soit f une similitude du plan qui envoie C_1 sur C_2 et l'axe des abscisses sur D .

1. Montrer que $f(O) = A$. En déduire que ni O ni A n'est le centre de la similitude.
2. Montrer que le rapport de la similitude est 2.
3. Déterminer l'ensemble E_1 des points M tels que $MA = 2MO$.
4. Montrer que l'angle de la similitude est $\pi/2$.
5. Déterminer les points M_1 et M_2 d'intersection entre D et C_2 .
6. Soit $B(-2, 0)$. Déterminer l'ensemble image $f(\{A, B\})$.
7. Déterminer l'ensemble E_2 des points M tels que $MA^2 + MO^2 = OA^2$, puis $E_1 \cap E_2$.
8. Déterminer les coordonnées du centre $I(x_I, y_I)$ de la similitude.
9. En déduire que $f(z) = 2iz + 2, \forall z \in \mathbb{C}$, puis l'image de A et B .

Correction de l'exercice 3.4

Dans le plan orienté, une unité étant choisie, on considère un rectangle $ABCD$ tel que

$$AB = \sqrt{2}, \quad AD = 1, \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \text{ est un angle droit direct.}$$

On désigne par I le milieu du segment $[AB]$.

Partie A : Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que $MD^2 - MB^2 = 1$.

1. On remarque que $AB = CD = \sqrt{2}$ et $AD = BC = 1$. Donc, $CD^2 - CB^2 = 1$: C appartient bien à (E) .
De même, I étant le milieu de $[AB]$, on a : $AI = BI = \sqrt{2}/2$ et $DI^2 = AD^2 + AI^2 = 5/4$. Donc : $DI^2 - BI^2 = 1$. I appartient aussi à (E) .
2. a) où G est le milieu de $[BD]$. La relation $MD^2 - MB^2 = 1$ s'écrit alors :
L'ensemble (E) est donc une droite perpendiculaire à (BD) . Comme C et I sont dans (E) , cette droite est la droite (CI) .
- b) Voir au-dessus

Partie B : Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(A, \vec{u}, \vec{v})$, où $\vec{u} = \overrightarrow{AB}/\sqrt{2}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. Soit S une similitude directe qui, au point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = az + b$, où a et b sont des nombres complexes avec a non nul.

Les coordonnées des points sont : $A(0, 0)$, $B(\sqrt{2}, 0)$, $D(0, 1)$ et $C(\sqrt{2}, 1)$.

1. Déterminer les nombres complexes a et b pour que $S(D) = C$ et $S(C) = B$. D a pour affixe i , C pour affixe $\sqrt{2} + i$, et B pour affixe $\sqrt{2}/2$. On veut donc : $\sqrt{2} + i = ai + b$ et $\sqrt{2}/2 = a(\sqrt{2} + i) + b$ D'où :
2. On remarque que $T = S$. L'expression "complexe" de T montre que son rapport est et que son angle est $-\pi/2$.
3. I étant le milieu de $[AB]$, l'affixe de I est $z_I = \sqrt{2}/2$. Il suffit alors de vérifier que l'expression complexe de T montre bien que $T(B) = I$, ce qui se fait par calcul.
4. On a : $S(D) = C$ et $S(B) = I$. L'image d'une droite par une similitude est une droite, donc l'image par T de la droite (BD) est la droite (CI) . Comme l'angle de T est $-\pi/2$, on en déduit que ces deux droites sont bien perpendiculaires.
5. Montrer que le centre W de la similitude T est le point d'intersection des droites (BD) et (CI) .