

CUPGE, Aix-Marseille Université

Première année, premier semestre 2015-16

Nombres complexes, exercices

1 Calculs sur des nombres complexes

Exercice 1.1

Mettre sous la forme $a + ib$ (où $a, b \in \mathbb{R}$) les nombres :

$$z_1 = \frac{3+6i}{3-4i}, \quad z_2 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i}, \quad z_3 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$$

Exercice 1.2

Placer les points d'affixe

$$z_1 = e^{i\pi/3}, \quad z_2 = 1 + i, \quad z_3 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

dans un repère orthonormé du plan.

Exercice 1.3

Effectuer les calculs suivants.

1. $(3+2i)(1-3i)$.
2. Produit du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.
3. $(1-3i)/(3+2i)$.
4. Quotient du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.

Exercice 1.4

Calculer le module et l'argument de

$$u = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}, \quad v = 1 - i.$$

En déduire le module et l'argument de $w = u/v$.

Exercice 1.5

Démontrer les égalités suivantes

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)(1+i)\frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{84}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{84}\right)\right) \quad (A)$$

$$(1-i)\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)(\sqrt{3}-i) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{60}\right) - i\sin\left(\frac{13\pi}{60}\right)\right) \quad (B)$$

$$\sqrt{2}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{1+i} = \frac{\sqrt{3}-i}{2} \quad (C)$$

Exercice 1.6

1. Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants.

$$z_1 = e^{e^{i\alpha}}, \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}; \quad e^{i\theta} + e^{2i\theta}, \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R}; \quad 1 + e^{i\theta}, \text{ avec } \theta \in]-\pi, \pi];$$

2. Déterminer le module et l'argument de $\frac{1+i}{1-i}$. Calculer $(\frac{1+i}{1-i})^{32}$.

3. Calculer $Z = (1 + i\sqrt{3})^{2000}$.

4. Calculer $(1 + i\sqrt{3})^5 + (1 - i\sqrt{3})^5$ et $(1 + i\sqrt{3})^5 - (1 - i\sqrt{3})^5$.

Exercice 1.7

Chacune des formules suivantes est fausse. Déterminer l'erreur sans faire les calculs

$$e^{2i\pi/3} e^{3i\pi/4} = 1 - \frac{i}{2}; \quad (1+i)(1-i) = 0; \quad (1+i)(1-i) = 1; \quad z^2 + 2z + 2 = (z-1-i)(z+2-i).$$

Exercice 1.8

Soit z un nombre complexe de module ρ , d'argument θ , et soit $\bar{z}$ son conjugué. Calculer $(z + \bar{z})(z^2 + \bar{z}^2) \dots (z^n + \bar{z}^n)$ en fonction de ρ et θ .

Exercice 1.9

1. Soit, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$Z = \frac{z+i}{z-i}.$$

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que : a) Z soit réel. b) Z soit imaginaire pur. c) Z ait un module égal à 1

2. Soit, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$Z = \frac{z+1}{z-2i}.$$

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que : a) Z soit réel. b) Z soit imaginaire pur. c) Z ait un module égal à 1. d) Z ait un argument égal à $\pi/2$.

Exercice 1.10

Soient z , z_1 et z_2 des nombres complexes. Montrer que $\Re(z) = |z|$ si et seulement si z est un nombre réel positif ou nul. Montrer que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$ ou $\arg(z_1) = \arg(z_2)$.

Exercice 1.11

Montrer que tout nombre complexe $z \neq -1$, de module 1, s'écrit

$$z = \frac{1+ix}{1-ix}$$

avec x réel.

Indications : poser $z = \cos \theta + i \sin \theta$ avec $0 \leq \theta < 2\pi$, puis faire intervenir $x = \tan(\theta/2)$.

2 Trigonométrie, formule d'Euler, formule de Moivre

Exercice 2.1

Soient α et β deux nombres réels. Mettre le nombre complexe $z = e^{i\alpha} + e^{i\beta}$ sous forme trigonométrique $z = \rho e^{i\gamma}$

Indication : poser $u = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $v = \frac{\alpha-\beta}{2}$.

En déduire la valeur de

$$\sum_{p=0}^n \binom{p}{n} \cos[p\alpha + (n-p)\beta].$$

Exercice 2.2

1. Écrire l'expression $(1 + \cos \phi + i \sin \phi)$ sous forme trigonométrique. En déduire l'expression de

$$(1 + \cos \phi + i \sin \phi)^n.$$

2. Donner la forme trigonométrique de

$$\frac{1 + \cos \theta - i \sin \theta}{1 - \cos \theta + i \sin \theta} \quad \text{et de} \quad \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}}.$$

Exercice 2.3

- Soit $\theta \in \mathbb{R}$. A l'aide de la formule de Moivre exprimer en fonction de $\cos \theta$ et de $\sin \theta$:
 - $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$.
 - $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$. En déduire une équation du troisième degré admettant pour solution $\cos(\frac{\pi}{3})$ et la résoudre.
- Linéariser les polynômes trigonométriques suivants : $1 + \cos^2 x$, $\cos^3 x + 2 \sin^2 x$.

Exercice 2.4

- Exprimer $\cos(7x)$ et $\sin(7x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$. Même question pour $\cos(9x)$ et $\sin(9x)$.
- Linéariser $\sin^6(x)$ et $\sin^8(x)$
- Calculer

$$\sum_{k=1}^7 \cos\left(\frac{k\pi}{7}\right).$$

Exercice 2.5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \sin(3x)$.
- $\cos^4(x) - \sin^4(x) = 1$.

Exercice 2.6

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la forme polaire de $(1+i)^n$. Pour quelles valeurs de n , $(1+i)^n$ est-il un nombre réel ?

3 Racines, équations du second degré

Exercice 3.1

- Calculer les racines carrées de 1, i et $2\sqrt{2}(1+i)$.
- Calculer les racines carrées de $8-6i$ et $7+24i$.
- Soit $z = a+ib$, avec a, b réels tels que $z^2 = (1+i)/\sqrt{2}$. Montrer que $a^2 + b^2 = 1$, puis que $a^2 - b^2 = 1/\sqrt{2}$ et $ab = \sqrt{2}/4$.
En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.

Exercice 3.2

Montrer que les solutions de $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b et c réels, sont réelles ou conjuguées.

Exercice 3.3

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- $z^2 - 3z - i = 0$.
- $z^2 + z + 1 = 0$.
- $ix^2 + 2x + (1-i) = 0$.
- $z^2 - (1+2i)z + i - 1 = 0$.
- $z^2 - (5-14i)z - 2(5i+12) = 0$.
- $z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 0$.
- $4z^2 - 2z + 1 = 0$.
- $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$.
- $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$.
- $z^3 + 3z - 2i = 0$.

Exercice 3.4

Trouver les racines cubiques de $2 - 2i$ et de $11 + 2i$.

Exercice 3.5

1. Résoudre $z^3 = 1$ et montrer que les racines s'écrivent $1, j$ et j^2 . Calculer $1 + j + j^2$ et en déduire les racines de l'équation $1 + z + z^2 = 0$.
2. Résoudre $z^n = 1$ et montrer que les racines s'écrivent sous la forme $1, \epsilon, \epsilon^2, \dots, \epsilon^{n-1}$ pour un certain $\epsilon \in \mathbb{C}$. En déduire les racines de $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 0$. Calculer, pour $p \in \mathbb{N}$, $1 + \epsilon^p + \epsilon^{2p} + \dots + \epsilon^{(n-1)p}$.

Exercice 3.6

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = (-1 + i)/4$ et montrer qu'une seule de ses solutions a une puissance quatrième réelle.
2. Calculer

$$Z = \frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}}$$

algébriquement puis trigonométriquement. En déduire $\cos(\pi/12)$, $\sin(\pi/12)$, $\tan(\pi/12)$ et $\tan(5\pi/12)$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{24} = 1$.

Exercice 3.7

Soit le polynôme $P(z) = iz^2 + (4i - 3)z + i - 5$.

1. Donner la somme des racines de P sans les calculer.
2. Déterminer les racines de P .

4 Binôme de Newton

Exercice 4.1

1. Quel est le coefficient de x^6 dans le développement de $(x + 2)^8$ puis de $(x^2 - 5)^7$?
2. Quel est le coefficient de x^3y^7 dans le développement de $(x - y)^{10}$?
3. Quel est le coefficient de x^6y^7 dans le développement de $(2x - y)^{13}$?

Exercice 4.2

1. Effectuer le développement de $(1 + x)^4$ par la formule du binôme de Newton (on conservera les coefficients binomiaux sans chercher à les simplifier).
2. Quel est le coefficient de x^4 dans le développement de $(1 + x)^4(1 + x)^4$ (on ne simplifiera pas la somme de produits que l'on obtient)?
3. Quel est le coefficient de x^4 dans le développement de $(1 + x)^8$?
4. En tenant compte de la symétrie des coefficients binomiaux, démontrer que

$$\binom{4}{0}^2 + \binom{4}{1}^2 + \binom{4}{2}^2 + \binom{4}{3}^2 + \binom{4}{4}^2 = \binom{8}{4}.$$

5. **Généralisation :** En remarquant que $(1 + x)^n(1 + x)^n = (1 + x)^{2n}$, montrer que l'on a

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p}^2 = \binom{2n}{n}$$

6. On veut calculer

$$S = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}^2.$$

Montrer que

$$S = \sum_{k=0}^n (n - k) \binom{n}{k}^2.$$

En déduire $2S$, puis S .

Exercice 4.3

En utilisant la formule $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$, calculer les sommes suivantes

$$S_1 = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k, \quad S_2 = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k, \quad S_3 = \sum_{k=0}^n k^3 \binom{n}{k} x^k.$$

Exercice 4.4

Démontrer que pour tout $0 \leq k \leq p \leq n$ on a l'égalité

$$\binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k} \binom{n}{p}.$$

En déduire que

$$\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}.$$

Exercice 4.5

Calculer le module et l'argument de $(1+i)^n$. En déduire les sommes

$$S_1 = 1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots, \quad S_2 = \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \dots.$$

Exercice 4.6

Démontrer les formules suivantes :

1. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$, pour $0 \leq p \leq n$.
On pourra utiliser le fait que l'application $A \in \mathcal{P}(E) \rightarrow A^c \in \mathcal{P}(E)$ est une bijection.
2. $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$, pour $0 \leq p \leq n-1$.
3. $\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2}$, pour $0 \leq p \leq n-2$.

Exercice 4.7

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit p un entier tel que $0 \leq p \leq n$.

1. Montrer que

$$\frac{(1+x)^{n+1} - 1}{x} = 1 + (1+x) + (1+x)^2 + \dots + (1+x)^n.$$

2. En déduire que

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

3. Ecrire ces égalités pour $p=2$ et $p=3$.
4. En déduire les sommes

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1), \quad S_2 = \sum_{k=1}^n k^2, \quad S_3 = \sum_{k=1}^{n-1} k^2(k+1), \quad S_4 = \sum_{k=1}^n k^3.$$

Exercice 4.8

1. Calculer

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx)$$

2. En déduire

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \sin(kx) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^2(kx)$$

5 Géométrie dans le plan complexe

Exercice 5.1

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'afixe z vérifie la condition : $|z - 4| = |z + 2i|$.
2. Déterminer par le calcul et géométriquement les nombres complexes z tels que $|z - 3|/|z - 5| = 1$. Généraliser à $|z - a|/|z - b| = 1$.
3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes non nuls tels que z , $1/z$, et $z - 1$ aient le même module.
4. Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'afixe z vérifie la condition $z + 4/z \in \mathbb{R}$.
5. Déterminer par le calcul et géométriquement les nombres complexes z tels que $|z - 3|/|z - 5| = \sqrt{2}/2$. Généraliser à $|z - a|/|z - b| = k$ où k est un réel positif différent de 1.

Exercice 5.2

Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D . Montrer que si $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right).$$

Exercice 5.3

Soient A et B deux points d'affixes respectives a et b . On note (Δ) la médiatrice de $[AB]$.

Montrer que le point M d'affixe z est sur (Δ) si et seulement si $|z - a| = |z - b|$.

Exercice 5.4

Soit T l'application du plan qui envoie le point M d'affixe z sur le point M' d'affixe $f(z) = (1 + i)z + 1$. On note A le point d'affixe $z_A = 1 - i$ et A' l'image de A par T .

1. Déterminer l'affixe de A' .
2. Résoudre l'équation $f(z) = z$. En déduire que T a un unique point fixe, noté F .
3. Montrer que le cercle de centre C et de rayon R est l'ensemble des points d'affixes dans $\{c + Re^{it}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}\}$, où c est l'affixe de C .
4. Déterminer l'image par T du cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.
5. Calculer FM et l'angle $(\overrightarrow{FM}, \overrightarrow{F'M'})$. En déduire la nature de T .

Exercice 5.5

Soient A, B et C trois points deux à deux distincts du plan d'affixes respectifs a, b et c . Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si on a l'une des conditions suivantes :

1. $a^2 + b^2 + c^2 = bc + ca + ab$
2. $(b - c)^{-1} + (c - a)^{-1} + (a - b)^{-1} = 0$.
3. j ou j^2 est racine de $az^2 + bz + c = 0$.

Exercice 5.6

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x - y + 2, x + y - 3).$$

On identifie $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ par $z = x + iy$.

1. Montrer que f définit une similitude directe du plan complexe (qu'on précisera).
2. Identifier de même

$$g(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{\sqrt{6}}{4}y, \frac{\sqrt{6}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{4}y \right).$$

3. Définir géométriquement, puis à l'aide des complexes, les applications $r = f \circ g$ et $r' = g \circ f$. En déduire les valeurs de $\sin(\pi/12)$ et $\cos(\pi/12)$.

Corrections rapides

1 Calculs sur des nombres complexes

Correction de l'exercice 1.1

— Calculons

$$z_1 = \frac{3+6i}{3-4i} = \frac{(3+6i)(3+4i)}{25} = \frac{(9-24) + i(18+12)}{25} = \frac{-15+30i}{25} = \frac{-3+6i}{5}$$

— Ici il est plus simple de calculer les termes indépendamment. Tout d'abord

$$\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{5} = \frac{1+3i}{5}, \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \frac{-8+4i}{25}, \quad \frac{3+6i}{3-4i} = \frac{-3+6i}{5}$$

d'où

$$z_2 = \frac{-8+4i}{25} + \frac{-3+6i}{5} = \frac{-23+24i}{25},$$

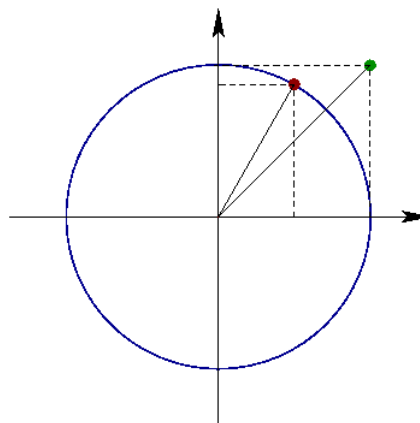
— Calculons

$$z_3 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i} = 2\Re\left(\frac{2+5i}{1-i}\right) = 2\Re\left(\frac{(2+5i)(1+i)}{2}\right) = \Re(-3+7i) = -3.$$

Correction de l'exercice 1.2

On considère les points d'affixe

$$z_1 = e^{i\pi/3}, \quad z_2 = 1+i, \quad z_3 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$



dans un repère orthonormé du plan.

On voit facilement que $z_2 = z_3$, le point correspondant est représenté en vert. z_1 est en rouge.

Correction de l'exercice 1.3

1. Calculons

$$(3+2i)(1-3i) = -3-7i.$$

2. Produit du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$:

$$2e^{i\pi/3} \cdot 3e^{-5\pi/6} = 6e^{i\pi(1/3-5/6)} = 6e^{-i\pi/2} = -6i.$$

3. Calculons

$$\frac{1-3i}{3+2i} = \frac{(1-3i)(3+2i)}{13} = \frac{9-7i}{13}.$$

4. Quotient du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$:

$$\frac{2e^{i\pi/3}}{3e^{-5\pi/6}} = \frac{2}{3}e^{i\pi(1/3+5/6)} = \frac{2}{3}e^{7i\pi/6}$$

Correction de l'exercice 1.4

Considérons

$$u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}, \quad v = 1-i.$$

Alors

$$|u| = \frac{1}{2}\sqrt{6+2} = \sqrt{2}, \quad |v| = \sqrt{2}.$$

On peut donc écrire

$$u = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) = \sqrt{2} e^{11i\pi/6}, \quad \text{d'où} \quad \arg(u) = \frac{11\pi}{6}, \quad \text{et} \quad v = \sqrt{2} e^{3i\pi/4} \quad \text{d'où} \quad \arg(v) = \frac{3\pi}{4}.$$

Par conséquent,

$$\left| \frac{u}{v} \right| = \frac{|u|}{|v|} = 1, \quad \arg\left(\frac{u}{v}\right) = [\arg(u) - \arg(v)] \bmod{2\pi} = \frac{11\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} \bmod{2\pi} = \frac{13\pi}{12}$$

Correction de l'exercice 1.5

(A) Calculons

$$\begin{aligned} \left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \right) (1+i) \frac{1-i\sqrt{3}}{2} &= e^{i\pi/7} \cdot \sqrt{2} e^{i\pi/4} \cdot e^{5i\pi/3} \\ &= \sqrt{2} \exp \left\{ i\pi \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{4} + \frac{5}{3} \right) \right\} \\ &= \sqrt{2} \exp \left\{ i\pi \frac{12+21+140}{84} \right\} \\ &= \sqrt{2} e^{5i\pi/84} \end{aligned}$$

ce qui est le résultat recherché.

(B) Calculons

$$\begin{aligned} (1-i) \left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \right) (\sqrt{3}-i) &= \sqrt{2} e^{7i\pi/4} \cdot e^{i\pi/5} \cdot 2e^{11i\pi/6} \\ &= 2\sqrt{2} \exp \left\{ i\pi \left(\frac{7}{4} + \frac{1}{5} + \frac{11}{6} \right) \right\} \\ &= 2\sqrt{2} \exp \left\{ i\pi \frac{105+12+110}{60} \right\} \\ &= 2\sqrt{2} \exp \left\{ i\pi \frac{227}{60} \right\} \\ &= 2\sqrt{2} \exp \left\{ -i\pi \frac{13}{60} \right\}, \end{aligned}$$

ce qui est le résultat recherché.

(C) Calculons

$$\sqrt{2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{1+i} = \frac{\sqrt{2} e^{i\pi/12}}{\sqrt{2} e^{i\pi/4}} = \exp \left\{ i\pi \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{4} \right) \right\} = \exp \left\{ -i\frac{\pi}{6} \right\} = \frac{\sqrt{3}-i}{2}.$$

Correction de l'exercice 1.6

1. Calcul de modules et arguments :

$$z_1 = e^{i\alpha}, \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R} : \quad z_1 = e^{\cos \alpha + i \sin \alpha} = e^{\cos \alpha} \cdot e^{i \sin \alpha}, \quad \text{donc} \quad |z_1| = |e^{\cos \alpha}| \cdot |e^{i \sin \alpha}| = e^{\cos \alpha}.$$

$$z_2 = e^{i\theta} + e^{2i\theta}, \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R} : \quad z_2 = e^{3i\theta/2} \left(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2} \right) = 2e^{3i\theta/2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad \text{donc} \quad |z_2| = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Avec le même raisonnement on montre que pour tout $\theta \in]-\pi, \pi]$, on a

$$|1 + e^{i\theta}| = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

On pouvait aussi voir directement que $1 + e^{i\theta} = e^{-i\theta/2} z_2$, donc $|1 + e^{i\theta}| = |z_2|$.

2. Calculons

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{2i}{2} = i, \quad \text{donc} \quad \left| \frac{1+i}{1-i} \right| = 1 \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Déterminer le module et l'argument de $\frac{1+i}{1-i}$. Calculer $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{32}$. De là,

$$\left| \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{32} \right| = \left| \frac{1+i}{1-i} \right|^{32} = 1, \quad \arg\left(\left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{32} \right) = 32 \cdot \frac{\pi}{2} \bmod{2\pi} = 0.$$

3. Soit $z = 1 + i\sqrt{3}$, calculons

$$|z| = \sqrt{1+3} = 2,$$

et on reconnaît

$$z = 2(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)) = 2e^{i\pi/3}.$$

De là,

$$Z = z^{2000} = 2^{2000} e^{2000i\pi/3} = 2^{2000} e^{2i\pi/3} = 2^{1999}(-1 + i\sqrt{3}),$$

car

$$\frac{2000\pi}{3} = \frac{1998\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 666\pi + \frac{2\pi}{3}, \quad \text{donc} \quad \frac{2000\pi}{3} [\text{mod } 2\pi] = \frac{2\pi}{3}.$$

4. On peut déjà observer que

$$1 - i\sqrt{3} = \overline{(1 + i\sqrt{3})}, \quad \text{d'où}$$

$$(1 + i\sqrt{3})^5 + (1 - i\sqrt{3})^5 = 2\Re\left((1 + i\sqrt{3})^5\right) \quad \text{et} \quad (1 + i\sqrt{3})^5 - (1 - i\sqrt{3})^5 = 2i\Im\left((1 + i\sqrt{3})^5\right).$$

Calculons

$$1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}, \quad \text{donc} \quad (1 + i\sqrt{3})^5 = 2^5 e^{5i\pi/3}.$$

Par conséquent,

$$(1 + i\sqrt{3})^5 + (1 - i\sqrt{3})^5 = 2^6 \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 2^5$$

$$(1 + i\sqrt{3})^5 - (1 - i\sqrt{3})^5 = 2^6 i \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -2^5 \sqrt{3}$$

Correction de l'exercice 1.7

Chacune des formules suivantes est fausse.

- $e^{2i\pi/3} e^{3i\pi/4} = 1 - \frac{i}{2}$: impossible car le membre de gauche est de module égal à 1, et pas le membre de droite.
- $(1+i)(1-i) = 0$: impossible car quand le produit de deux complexes est nul, nécessairement l'un des deux est nul.
- $(1+i)(1-i) = 1$: impossible car c'est le produit d'un complexe par son conjugué, ils ont tous deux le même module qui est différent de 1.
- $z^2 + 2z + 2 = (z-1-i)(z+2-i)$: impossible car le terme constant du membre de gauche qui vaut 2 doit être égal au produit des deux racines dans le membre de droite, à savoir $(1+i)(i-2)$, ce qui est faux.

Correction de l'exercice 1.8

Écrivons $z = \rho e^{i\theta}$, alors $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$. Donc

$$\begin{aligned} P &= \prod_{k=1}^n (z^k + \bar{z}^k) \\ &= \prod_{k=1}^n \rho^k \left((e^{i\theta})^k + (e^{-i\theta})^k \right) \\ &= \prod_{k=1}^n \rho^k \left(e^{ik\theta} + e^{-ik\theta} \right) \\ &= \prod_{k=1}^n 2\rho^k \cos k\theta \\ &= 2^n \cdot \rho \cdot \rho^2 \cdot \dots \cdot \rho^n \prod_{k=1}^n \cos k\theta \\ &= 2^n \rho^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=1}^n \cos k\theta. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 1.9

1. On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq i$

$$Z = \frac{z+i}{z-i} = \frac{(z+i)(\bar{z}+i)}{(z-i)(\bar{z}+i)} = \frac{|z|^2 - 1 + i(z+\bar{z})}{|z|^2 + 1 + i(z-\bar{z})}.$$

Le dénominateur est réel, donc on peut raisonner sur le numérateur.

- Z est réel si et seulement si $z + \bar{z} = 0$, ce qui est vrai si et seulement si z est imaginaire pur. L'ensemble considéré est l'axe Oy .
- Z est imaginaire pur si et seulement si $|z| = 1$. L'ensemble considéré est le cercle unité.

Par ailleurs, on a aussi

$$|Z|^2 = \frac{(z+i)(\bar{z}-i)}{(z-i)(\bar{z}+i)} = \frac{|z|^2 - i(z - \bar{z}) + 1}{|z|^2 - i(z - \bar{z}) + 1} = \frac{|z|^2 - 2\Im(z) + 1}{|z|^2 + 2\Im(z) + 1}$$

Donc Z est de module égal à 1 si et seulement si $\Im(z) = 0$, donc si et seulement si z est réel. L'ensemble considéré est l'axe Ox .

2. On a pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 2i$

$$Z = \frac{z+1}{z-2i} = \frac{(z+1)(\bar{z}+2i)}{(z-2i)(\bar{z}+2i)} = \frac{|z|^2 + 2iz + \bar{z} + 2i}{|z|^2 + 4 + 4\Im(z)}.$$

De nouveau le dénominateur est réel, donc on peut raisonner sur le numérateur. On pose $z = x + iy$, le numérateur vaut alors $(x^2 + y^2 + x - 2y) + i(2x - y + 2)$.

— Z est réel si et seulement si M appartient à la droite d'équation $2x - y + 2 = 0$.

— Z est imaginaire pur si et seulement si $x^2 + y^2 + x - 2y = 0$, ce qui équivaut à $(x + 1/2)^2 + (y - 1)^2 = 5/4$.

Donc Z est imaginaire pur si et seulement si M appartient au cercle de centre $O(-1/2, 1)$ et de rayon $\sqrt{5}/4$.
— L'argument de Z vaut $\pi/2$ si Z est imaginaire pur et si sa partie imaginaire est positive. L'ensemble considéré est donc l'intersection du cercle de centre $O(-1/2, 1)$ et de rayon $\sqrt{5}/4$ et du demi-plan $y \geq 0$.

Calculons le module de Z :

$$|Z|^2 = \frac{(z+1)(\bar{z}+1)}{(z-2i)(\bar{z}-2i)} = \frac{|z|^2 + 2\Re(z) + 1}{|z|^2 + 4\Im(z) + 4}.$$

Le module de Z vaut 1 si et seulement si $2\Re(z) + 1 = 4\Im(z) + 4$. L'ensemble des points M considéré est donc la droite d'équation $2x - 4y - 3 = 0$.

Correction de l'exercice 1.10

- On sait que si $z = x + iy$ avec $x = \Re(z)$ et $y = \Im(z)$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq |x|$, avec égalité si et seulement si $y = 0$. De plus, $|x| = x$ si et seulement si x est positif ou nul. Ceci prouve la propriété demandée.
- Notons $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ et $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$. On a donc

$$|z_1 + z_2| = \left| |z_1|e^{i\theta_1} + |z_2|e^{i\theta_2} \right| = \left| |z_1| + |z_2|e^{i(\theta_2 - \theta_1)} \right|$$

On sait que $|z + z'| = |z| + |z'|$ si et seulement si z et z' sont proportionnels, avec un facteur de proportionnalité réel positif ou nul. En appliquant ceci à notre résultat, on voit que la propriété est vraie si $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$, et dans le cas contraire si et seulement si $\arg(z_1) = \arg(z_2)$.

Correction de l'exercice 1.11

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$ et $z \neq -1$. Posons $z = \cos \theta + i \sin \theta$, et soit $x = \tan(\theta/2)$. Notons que puisque $z \neq -1$, x est bien défini. Calculons alors

$$\frac{1+ix}{1-ix} = \frac{1+i\tan(\theta/2)}{1-i\tan(\theta/2)} = \frac{\cos(\theta/2) + i\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2) - i\sin(\theta/2)} = \frac{e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}} = e^{i\theta} = z.$$

2 Trigonométrie, formule d'Euler, formule de Moivre

Correction de l'exercice 2.1

Soient α et β deux nombres réels. Posons $u = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $v = \frac{\alpha-\beta}{2}$, on a donc $\alpha = u + v$ et $\beta = u - v$. Par conséquent, on a

$$z = e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i(u+v)} + e^{i(u-v)} = e^{iu} (e^{iv} + e^{-iv}) = 2e^{iu} \cos(v) = 2e^{i(\alpha+\beta)/2} \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

De là, on peut déduire

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \cos[p\alpha + (n-p)\beta] &= \Re \left(\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} e^{ip\alpha} e^{i(n-p)\beta} \right) \\ &= \Re \left(\left(e^{i\alpha} + e^{i\beta} \right)^n \right) \\ &= \Re \left(2^n e^{in(\alpha+\beta)/2} \cos^n \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right) \right) \\ &= 2^n \cos \left(\frac{n(\alpha+\beta)}{2} \right) \cos^n \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right). \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2.2

1. Écrivons $1 + \cos \phi = 2 \cos^2(\phi/2)$ et $\sin \phi = 2 \sin(\phi/2) \cos(\phi/2)$. On a donc

$$1 + \cos \phi + i \sin \phi = 2 \cos(\phi/2) e^{i\phi/2} .$$

De là on déduit

$$(1 + \cos \phi + i \sin \phi)^n = 2^n \cos(n\phi/2) e^{in\phi/2} .$$

2. On en déduit que

$$1 + \cos \theta - i \sin \theta = 2 \cos(\theta/2) e^{-i\theta/2} .$$

Dans le même ordre d'idées, on a $1 - \cos \theta = 2 \sin^2(\theta/2)$, donc

$$1 - \cos \theta + i \sin \theta = 2 \sin(\theta/2) [\sin(\theta/2) + i \cos(\theta/2)] = 2i \sin(\theta/2) [\cos(\theta/2) - i \sin(\theta/2)] = 2i \sin(\theta/2) e^{-i\theta/2} .$$

Par conséquent,

$$\frac{1 + \cos \theta - i \sin \theta}{1 - \cos \theta + i \sin \theta} = -i \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} .$$

Par ailleurs

$$\frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{1 + \cos \theta + i \sin \theta}{1 - \cos \theta - i \sin \theta} = \frac{2 \cos(\theta/2) e^{i\theta/2}}{-2i \sin(\theta/2) e^{i\theta/2}} = i \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} .$$

Correction de l'exercice 2.3

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. A l'aide de la formule de Moivre exprimer en fonction de $\cos \theta$ et de $\sin \theta$:

a) On sait que

$$\cos(2\theta) + i \sin(2\theta) = e^{2i\theta} = [\cos \theta + i \sin \theta]^2 = [\cos^2 \theta - \sin^2 \theta] + 2i \sin \theta \cos \theta ,$$

d'où par identification

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \text{et} \quad \sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta .$$

b) On sait que

$$\cos(3\theta) + i \sin(3\theta) = e^{3i\theta} = [\cos \theta + i \sin \theta]^3 = [\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta] + i[-\sin^3 \theta + 3 \sin \theta \cos^2 \theta] ,$$

d'où par identification

$$\cos(3\theta) = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta \quad \text{et} \quad \sin(3\theta) = -\sin^3 \theta + 3 \sin \theta \cos^2 \theta .$$

Pour $\theta = \pi/3$ on a donc

$$-1 = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta .$$

En posant $x = \cos \theta$ ceci s'écrit

$$4x^3 - 3x + 1 = 0 .$$

Une racine est donc $x = 1/2$, on peut alors factoriser

$$4x^3 - 3x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right) (ax^2 + bx + c) = ax^3 + \left(b - \frac{a}{2}\right) x^2 + \left(c - \frac{b}{2}\right) x - \frac{c}{2} ,$$

d'où par identification

$$a = 4 , \quad b = 2 , \quad c = -2 .$$

Les autres racines de cette équation s'obtiennent en résolvant

$$2x^2 + x - 1 = 0 .$$

Le discriminant vaut $\Delta = 1 + 8 = 9$, les racines sont donc $x = -1$ et $x = 1/2$, qui est donc racine double. On a donc

$$4x^3 - 3x + 1 = 4 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 (x + 1) .$$

2. Linéariser les polynômes trigonométriques suivants : $1 + \cos^2 x$, $\cos^3 x + 2 \sin^2 x$. La formule d'Euler donne

$$1 + \cos^2 x = 1 + \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}}{4} = \frac{\cos(2x) + 3}{2}$$

De même,

$$\begin{aligned} \cos^3 x + 2 \sin^2 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 + 2 \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 \\ &= \frac{e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}}{8} - 2 \frac{e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}}{4} \\ &= \frac{1}{4} \cos(3x) - \cos(2x) + \frac{3}{4} \cos(x) + 1 \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2.4

1. Calculons

$$\begin{aligned}e^{7ix} &= (\cos x + i \sin x)^7 \\&= \cos^7 x + 7i \cos^6 x \sin x - 21 \cos^5 x \sin^2 x - 35i \cos^4 x \sin^3 x + \\&\quad 35 \cos^3 x \sin^4 x + 21i \cos^2 x \sin^5 x - 7 \cos x \sin^6 x - i \sin^7 x \\&= [\cos^7 x - 21 \cos^5 x \sin^2 x + 35 \cos^3 x \sin^4 x - 7 \cos x \sin^6 x] \\&\quad + i [7 \cos^6 x \sin x - 35 \cos^4 x \sin^3 x + 21 \cos^2 x \sin^5 x - \sin^7 x] .\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\cos(7x) &= \cos^7 x - 21 \cos^5 x \sin^2 x + 35 \cos^3 x \sin^4 x - 7 \cos x \sin^6 x \\ \sin(7x) &= 7 \cos^6 x \sin x - 35 \cos^4 x \sin^3 x + 21 \cos^2 x \sin^5 x - \sin^7 x\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}e^{9ix} &= (\cos x + i \sin x)^9 \\&= \cos^9 x + 9i \cos^8 x \sin x - 36 \cos^7 x \sin^2 x - 84i \cos^6 x \sin^3 x + 126 \cos^5 x \sin^4 x \\&\quad + 126i \cos^3 x \sin^5 x - 84 \cos^3 x \sin^6 x - 36i \cos^2 x \sin^7 x + 9 \cos x \sin^8 x + i \sin^9 x \\&= [\cos^9 x - 36 \cos^7 x \sin^2 x + 126 \cos^5 x \sin^4 x - 84 \cos^3 x \sin^6 x + 9 \cos x \sin^8 x] \\&= +i [9 \cos^8 x \sin x - 84 \cos^6 x \sin^3 x + 126 \cos^3 x \sin^5 x - 36 \cos^2 x \sin^7 x + \sin^9 x]\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\cos(9x) &= \cos^9 x - 36 \cos^7 x \sin^2 x + 126 \cos^5 x \sin^4 x - 84 \cos^3 x \sin^6 x + 9 \cos x \sin^8 x \\ \sin(9x) &= 9 \cos^8 x \sin x - 84 \cos^6 x \sin^3 x + 126 \cos^3 x \sin^5 x - 36 \cos^2 x \sin^7 x + \sin^9 x\end{aligned}$$

2. Calculons

$$\begin{aligned}\sin^6 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^6 \\&= \frac{-1}{64} [e^{6ix} - 6e^{4ix} + 15e^{2ix} - 20 + 15e^{-2ix} - 6e^{-4ix} + e^{-6ix}] \\&= \frac{-1}{32} [\cos(6x) - 6 \cos(4x) + 15 \cos(2x) - 20]\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}\sin^8 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^8 \\&= \frac{1}{256} [e^{8ix} - 8e^{6ix} + 28e^{4ix} - 56e^{2ix} + 128 - 56e^{-2ix} + 28e^{-4ix} - 8e^{-6ix} + e^{-8ix}] \\&= \frac{1}{128} [\cos(8x) - 8 \cos(6x) + 28 \cos(4x) - 56 \cos(2x) + 128]\end{aligned}$$

3. Calculons

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^7 \cos\left(\frac{k\pi}{7}\right) &= \Re\left(\sum_{k=1}^7 e^{ik\pi/7}\right) = \Re\left(\frac{1 - e^{8i\pi/7}}{1 - e^{i\pi/7}} - 1\right) = \Re\left(\frac{1 + e^{i\pi/7} - 1 + e^{i\pi/7}}{1 - e^{i\pi/7}}\right) \\&= 2 \Re\left(\frac{e^{i\pi/7}}{1 - e^{i\pi/7}}\right) = 2 \Re\left(\frac{e^{i\pi/7} (1 - e^{-i\pi/7})}{2 - 2 \cos(\pi/7)}\right) = \frac{\cos(\pi/7) - 1}{1 - \cos(\pi/7)} = -1 .\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2.5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. On considère l'équation

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) = \sin(3x) .$$

Commençons par développer

$$\begin{aligned}\sin(3x) = \Im(e^{3ix}) &= \Im(\cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x) \\&= -\sin^3 x + 3 \cos^2 x \sin x \\&= -4 \sin^3 x + 3 \sin x .\end{aligned}$$

L'équation s'écrit alors sous la forme $1 - 2\sin^2 x = -4\sin^3 x + 3\sin x$, soit

$$4X^3 - 2X^2 - 3X + 1 = 0 ,$$

où on a posé $X = \sin x$. C'est une équation du troisième degré, qui admet comme solution immédiate $X = 1$. On peut donc factoriser $X - 1$, et chercher les nombres a , b et c tels que

$$4X^3 - 2X^2 - 3X + 1 = (X - 1)(aX^2 + bX + c)$$

Le calcul donne

$$(X - 1)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b - a)X^2 + (c - b)X - c ,$$

d'où par identification $a = 4$, $b = 2$ et $c = -1$, et donc $4X^3 - 2X^2 - 3X + 1 = (X - 1)(4X^2 + 2X - 1)$. Reste à factoriser ce polynôme de degré 2. Pour cela on calcule le discriminant $\Delta = 4 + 16 = 20 = (2\sqrt{5})^2$, les racines sont $X_{\pm} = (-1 \pm \sqrt{5})/4$, d'où la factorisation

$$4X^3 - 2X^2 - 3X + 1 = (X - 1) \left(X - \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \right) \left(X - \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \right) .$$

Les solutions sont donc de la forme $X = 1$, soit $x = \pi/2 + 2k\pi$, $x = \arcsin((-1 + \sqrt{5})/4) + 2k\pi$ et $x = \arcsin((-1 - \sqrt{5})/4) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2. On considère l'équation

$$\cos^4(x) - \sin^4(x) = 1 .$$

Elle équivaut à

$$(1 - \sin^2 x)^2 - \sin^4 x = 1 \iff \sin x = 0 ,$$

les solutions sont donc $x = k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 2.6

Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, donc

$$(1 + i)^n = 2^{n/2} e^{in\pi/4} .$$

$(1 + i)^n$ est donc un nombre réel pour tout n multiple de 4.

3 Racines, équations du second degré

Correction de l'exercice 3.1

- Sous forme polaire on écrit $1 = 1 \times e^{i \times 0}$, donc $\arg(1) = 0$. Notons $\xi = \rho e^{i\theta}$ une racine carrée de 1. On a donc $\xi^2 = \rho^2 e^{2i\theta} = 1$, soit $\rho^2 = 1$ et $2\theta = 0 \pmod{2\pi}$. On en déduit $\rho = 1$ (car ρ est un réel positif) et $\theta = 0 \pmod{\pi}$. En se limitant à $\theta \in [0, 2\pi[$ on obtient donc $\xi = e^{i \times 0} = 1$ et $z = e^{i\pi} = -1$.
— Faisons le même raisonnement avec $i = e^{i\pi/2}$. Soit donc $\xi = \rho e^{i\theta}$ une racine carrée de i . On a donc $\xi^2 = \rho^2 e^{2i\theta} = i = e^{i\pi/2}$, d'où on déduit $\rho = \sqrt{|i|} = 1$ et $2\theta = \pi/2 \pmod{2\pi}$. Donc $\theta = \pi/4 \pmod{\pi}$, et en se limitant à $\theta \in [0, 2\pi[$ les deux solutions sont $\theta = \pi/4$ et $\theta = 5\pi/4$. Les deux racines sont donc $\xi = e^{i\pi/4} = 1 + i$ et $\xi = e^{5i\pi/4} = -1 - i$.
— Commençons par mettre $z = 2\sqrt{2}(1 + i)$ sous forme polaire : $|z| = 4$, et on a donc $z = 4e^{i\pi/4}$. Cherchons $\xi = \rho e^{i\theta}$ tel que $\xi^2 = z$. On voit tout de suite que $\rho = 2$. Par ailleurs, on a aussi $2\theta = \pi/4 \pmod{2\pi}$, donc $\theta = \pi/8 \pmod{\pi}$, d'où deux solutions, $\theta = \pi/8$ et $\theta = 9\pi/8$.
- Soit $z = 8 - 6i$. Alors $|z| = \sqrt{64 + 36} = 10$, et $z = 10e^{i\alpha}$. Cherchons $\xi = \rho e^{i\theta}$ tel que $\xi^2 = z$. On voit tout de suite que $\rho = \sqrt{10}$. Par ailleurs, $\theta = \alpha/2 \pmod{\pi}$. On a deux solutions, à savoir $\xi = \pm\sqrt{10}e^{i\alpha/2}$.
— Soit $z = 7 + 24i$. Alors $|z| = \sqrt{49 + 576} = 625$, et $z = 10e^{i\alpha}$. Cherchons $\xi = \rho e^{i\theta}$ tel que $\xi^2 = z$. On voit tout de suite que $\rho = \sqrt{625} = 25$. Par ailleurs, $\theta = \alpha/2 \pmod{\pi}$. On a deux solutions, à savoir $\xi = \pm\sqrt{10}e^{i\alpha/2}$.
- Soit $z = a + ib$, avec a, b réels tels que $z^2 = (1 + i)/\sqrt{2}$. On voit tout de suite que $z^2 = e^{i\pi/4}$, donc $|z| = 1$, d'où $a^2 + b^2 = 1$. Calculons aussi

$$(a + ib)^2 = (a^2 - b^2) + 2iab ,$$

d'où par identification $a^2 - b^2 = 1/\sqrt{2}$ et $2ab = 1/2\sqrt{2}$. On déduit de cette dernière égalité que a et b sont de même signe. Par ailleurs, on a

$$a^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) , \quad b^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) .$$

a et b étant de même signe, on en déduit les solutions

$$z = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{1 - \sqrt{2}}{2}} , \quad z = -\sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{1 - \sqrt{2}}{2}} .$$

On en déduit aussi

$$\cos(\pi/8) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, \quad \sin(\pi/8) = \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}}{2}}.$$

Correction de l'exercice 3.2

Soient a, b et c des réels, on considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$. Le discriminant est réel. S'il est positif, les deux racines sont réelles. S'il est négatif, les racines sont de la forme $(-b \pm i\sqrt{|\Delta|})/2a$ et sont donc complexes conjuguées l'une de l'autre.

Correction de l'exercice 3.3

On considère dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 - 3z - i = 0$: le discriminant vaut $\Delta = 9 + 4i$. Son module vaut $|\Delta| = \sqrt{97}$, notons θ son argument. $\theta \approx 0.42 \text{ rad}$, les racines sont de la forme

$$z_{\pm} = \frac{3 \pm \sqrt{97}e^{i\theta/2}}{2}.$$

Pour aller plus loin, notons que $\cos \theta = 2 \cos^2(\theta/2) - 1 = 1 - 2 \sin^2(\theta/2)$, d'où on déduit

$$\cos^2(\theta/2) = \frac{1}{2}(\cos \theta + 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{\sqrt{97}} + 1\right), \quad \sin^2(\theta/2) = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{9}{\sqrt{97}}\right).$$

Par ailleurs, $\cos \theta$ et $\sin \theta$ sont tous deux positifs, donc $\theta \in [0, \pi/2]$, et donc $\cos(\theta/2)$ et $\sin(\theta/2)$ sont positifs aussi. Par conséquent

$$\cos(\theta/2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{9}{\sqrt{97}}}, \quad \sin(\theta/2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{9}{\sqrt{97}}}.$$

De là on déduit

$$z_+ = \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{97}+9}\right] + i\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{97}-9}, \quad z_- = \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{97}+9}\right] - i\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{97}-9}.$$

2. $z^2 + z + 1 = 0$: le discriminant vaut $\Delta = -3$. Les racines sont de la forme

$$z_{\pm} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Donc $z_+ = e^{2i\pi/3}$ et $z_- = e^{4i\pi/3}$.

3. $ix^2 + 2x + (1-i) = 0$: le discriminant vaut $\Delta = 4 - 4i(1-i) = -4i = 4e^{3i\pi/2}$. Les racines sont de la forme

$$z_{\pm} = \frac{-2 \pm 2e^{3i\pi/4}}{2i} = -i\left(-1 \pm \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} + i\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

4. $z^2 - (1+2i)z + i - 1 = 0$:

5. $z^2 - (5-14i)z - 2(5i+12) = 0$:

6. $z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 0$:

7. $4z^2 - 2z + 1 = 0$: le discriminant vaut $\Delta = -12$. Les racines sont

$$z_{\pm} = \frac{2 \pm 2i\sqrt{3}}{8} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}e^{\pm i\pi/3}.$$

8. $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$: il s'agit d'une équation du quatrième degré, de type *équation bicarrée*. Posons $Z = z^2$. L'équation équivaut à

$$Z^2 + 10Z + 169 = 0.$$

Le discriminant de cette dernière équation vaut $\Delta = -576 = -24^2$. Les racines sont donc

$$Z_{\pm} = \frac{-10 \pm 24i}{2} = -5 \pm 12i.$$

On voit que $|Z_{\pm}| = 13$. Soit $\theta_{\pm} = \arg(Z_{\pm})$. Comme $\cos(\theta_{\pm}) < 0$ on voit que $\theta_{\pm} \in]\pi/2, 3\pi/2[$. De plus, $\sin \theta_+ > 0$ donc $\theta_+ \in]\pi/2, \pi[$, et $\sin \theta_- > 0$ donc $\theta_- \in]\pi, 3\pi/2[$.

Il faut maintenant calculer les racines carrées de ces deux solutions, qui sont de la forme

$$\pm\sqrt{13}e^{i\theta_+/2}, \quad \pm\sqrt{13}e^{i\theta_-/2}.$$

On peut utiliser les identités

$$\cos^2(\theta/2) = \frac{1+\cos \theta}{2}, \quad \sin^2(\theta/2) = \frac{1-\cos \theta}{2},$$

et en déduire

$$\cos^2(\theta_+/2) = \frac{4}{13}, \quad \sin^2(\theta_+/2) = \frac{9}{13}.$$

Compte tenu du fait que $\theta_+ \in]\pi/2, \pi[$, $\theta_+ \in]\pi/4, \pi/2[$ et donc $\cos(\theta_+/2) > 0$ et $\sin(\theta_+/2) > 0$, d'où

$$\cos(\theta_+/2) = \frac{2}{\sqrt{13}}, \quad \sin(\theta_+/2) = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad \text{et on obtient donc les deux premières racines} \quad z_1 = 2+3i, \quad z_2 = -2-3i.$$

On peut faire le même raisonnement et obtenir les deux autres racines. On peut aussi remarquer que Z_- est le complexe conjugué de Z_+ , et donc les deux racines carrées de Z_- seront complexes conjuguées des deux racines carrées de Z_+ obtenues plus haut. On obtient donc

$$z_3 = 2 - 3i, \quad z_4 = -2 + 3i.$$

remarque : pour trouver ces racines, on peut aussi les rechercher directement, en résolvant par exemple l'équation

$$(a + ib)^2 = -5 \pm 12i, \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 - b^2 = -5 \quad \text{et} \quad 2ab = \pm 12.$$

En utilisant la seconde de ces deux équations (et vérifiant que $a = 0$ est impossible), on a $b = \pm 6/a$, ce qui conduit à l'équation

$$a^4 + 5a^2 - 36 = 0.$$

Les solutions de cette équation retrouvent celles obtenues plus haut.

9. $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$: c'est encore une équation bicarrée. Posons $Z = z^2$, l'équation s'écrit

$$Z^2 + 2Z + 4 = 0,$$

le discriminant vaut $\Delta = -12$, les racines sont

$$Z_{\pm} = \frac{-2 \pm 2i\sqrt{3}}{2}, \quad Z_+ = e^{2i\pi/3}, \quad Z_- = e^{4i\pi/3}.$$

En prenant les racines carrées on obtient les quatre racines

$$\pm e^{i\pi/3}, \quad \pm e^{2i\pi/3}.$$

10. $z^3 + 3z - 2i = 0$: c'est une équation du troisième degré, mais on voit que $z_0 = i$ est solution. Pour trouver les deux autres racines, il faut factoriser ce trinôme. Écrivons pour cela

$$z^3 + 3z - 2i = (z - i)(az^2 + bz + c) = az^3 + (b - ai)z^2 + (c - bi)z - ic.$$

par identification, on obtient $a = 1$, $c = 2$ et $b = i$, d'où

$$z^3 + 3z - 2i = (z - i)(z^2 + iz + 2).$$

Pour terminer la factorisation, calculons le discriminant du dernier binôme : $\Delta = -1 - 8 = -9$, les racines sont donc

$$z_{\pm} = \frac{-i \pm 3i}{2}, \quad z_+ = i, \quad z_- = -2i.$$

Correction de l'exercice 3.4

- Soit $z = 2 - 2i$. $|z| = 2\sqrt{2}$, et donc $z = 2\sqrt{2}(1 - i)/\sqrt{2}$ se met sous la forme polaire $z = re^{i\theta}$ avec $r = 2\sqrt{2}$ et $\theta = 7\pi/4$. Cherchons les racines cubiques de z . Soit $\xi = \rho e^{i\alpha}$, tel que $\xi^3 = z$. On a donc

$$\rho^3 e^{3i\alpha} = re^{i\theta},$$

et par unicité du module et de l'argument on en déduit

$$\rho = r^{1/3} = \sqrt{2}, \quad 3\alpha = \theta \pmod{2\pi}.$$

Cette dernière équation donne

$$\alpha = \frac{7\pi}{12} \pmod{2\pi/3}.$$

Les solutions sont donc $\alpha = \frac{7\pi}{12}$, $\alpha = \frac{15\pi}{12}$ et $\alpha = \frac{23\pi}{12}$. Finalement, les trois racines cubiques sont

$$\xi_1 = \sqrt{2}e^{7i\pi/12}, \quad \xi_2 = \sqrt{2}e^{15i\pi/12}, \quad \xi_3 = \sqrt{2}e^{23i\pi/12}.$$

- Soit $z = 11 + 2i$. $|z| = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$. Soit $\theta = \arg(z) \approx 0.18 \text{ rad}$, on a $z = 5\sqrt{5}e^{i\theta}$. Cherchons les racines cubiques de z . Soit $\xi = \rho e^{i\alpha}$, tel que $\xi^3 = z$. On a donc

$$\rho^3 e^{3i\alpha} = \rho e^{i\theta},$$

et par unicité du module et de l'argument on en déduit

$$\rho = r^{1/3} = \sqrt[3]{5}, \quad 3\alpha = \theta \pmod{2\pi}.$$

Cette dernière équation donne

$$\alpha = \theta/3 \pmod{2\pi/3}.$$

Les solutions sont donc $\alpha = \theta/3 \approx 0.06 \text{ rad}$, $\alpha = \theta/3 + 2\pi/3 \approx 2.15 \text{ rad}$ et $\alpha = \theta/3 + 4\pi/3 \approx 4.25 \text{ rad}$.

Correction de l'exercice 3.5

1. Résolvons $z^3 = 1$. Mettant z sous forme polaire, c'est à dire $z = \rho e^{i\theta}$, on voit que $\rho^3 = 1$, d'où $\rho = 1$ (car le module est un réel positif), et que $3\theta = 0 \pmod{2\pi}$. Donc $\theta = 0 \pmod{2\pi/3}$, ce qui nous donne trois solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi[$: $\theta = 0$, $\theta = 2\pi/3$ et $\theta = 4\pi/3$. Les trois racines cubiques de 1 correspondantes sont donc

$$1, \quad j = e^{2i\pi/3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad j^2 = e^{4i\pi/3} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Le calcul donne

$$1 + j + j^2 = 1 + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = 0.$$

De là on déduit que j est racine de l'équation $1 + z + z^2 = 0$. Le produit des racines est égal à 1, donc la seconde racine vaut $1/j = j^2$.

2. L'équation $z^n = 1$ se résout de la même façon. En mettant z sous forme polaire, $z = \rho e^{i\theta}$, on voit que $\rho^n = 1$ d'où $\rho = 1$, et que $n\theta = 0 \pmod{2\pi}$. Donc $\theta = 0 \pmod{2\pi/n}$, ce qui nous donne n solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi[$: $\theta = 0$, $\theta = 2\pi/n$, $\theta = 4\pi/n, \dots, \theta = 2(n-1)\pi/n$. Les racines correspondantes sont donc

$$1, \quad \epsilon = e^{2i\pi/N}, \quad \epsilon^2 = e^{4i\pi/N}, \dots, \epsilon^{n-1} = e^{2i(n-1)\pi/n}.$$

Soit maintenant $p \in \mathbb{N}$. Il faut distinguer deux cas :

- Si p est un multiple de n , c'est à dire $p = \ell n$ avec $\ell \in \mathbb{Z}$, alors $\epsilon^p = e^{2i\pi\ell} = 1$ et donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\epsilon^{kp} = 1$, d'où

$$1 + \epsilon^p + \epsilon^{2p} + \dots + \epsilon^{(n-1)p} = n.$$

- Supposons maintenant que p ne soit pas multiple de n . Alors $\epsilon^p \neq 1$ et on peut calculer

$$1 + \epsilon^p + \epsilon^{2p} + \dots + \epsilon^{(n-1)p} = \sum_{k=0}^{n-1} (\epsilon^p)^k = \frac{1 - \epsilon^{pn}}{1 - \epsilon^p} = 0$$

car

$$\epsilon^{pn} = e^{2ip\pi} = 1.$$

Correction de l'exercice 3.6

1. Soit $\xi = (-1 + i)/4$ et cherchons les $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^3 = \xi$. On peut noter que $\xi = e^{3i\pi/4}/2\sqrt{2}$, donc $|\xi| = 1/2\sqrt{2}$. Soit $z = re^{i\theta}$. $z^3 = \xi$ équivaut à

$$r^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad 3\theta = \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi},$$

on a donc

$$r = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \quad \theta = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi/3}$$

les racines sont ainsi

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} e^{i\pi/4}, \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} e^{11i\pi/12}, \quad z_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} e^{19i\pi/12}.$$

De là,

$$z_1^4 = -\frac{1}{4}, \quad z_2^4 = \frac{1}{4} e^{44i\pi/12} = \frac{1}{4} e^{5i\pi/6}, \quad z_3^4 = \frac{1}{4} e^{76i\pi/12} = \frac{1}{4} e^{i\pi/3},$$

seule la première des solutions a donc une puissance quatrième réelle.

2. Calculons

$$Z = \frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}} = \frac{e^{i\pi/3}}{e^{i\pi/4}} = e^{i\pi/12}.$$

Par ailleurs,

$$Z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}(1+i)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

Donc

$$\cos(\pi/12) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \quad \sin(\pi/12) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \quad \tan(\pi/12) = \frac{-1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}.$$

Pour calculer $\tan(5\pi/12)$, remarquons que $5\pi/12 = \pi/3 + \pi/12$, donc

$$e^{5i\pi/12} = e^{i\pi/12} e^{i\pi/3} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

On en déduit

$$\tan(5\pi/12) = \frac{1+\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}}$$

Pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{24} = 1$, on voit tout d'abord que $|z| = 1$. Ensuite, en notant $\theta = \arg(z)$, on a

$$24\theta = 0 \pmod{2\pi},$$

donc les valeurs possibles de θ sont tous les multiples de $\pi/12$ compris entre 0 et 2π . Les racines cherchées sont donc les nombres

$$z_k = e^{ik\pi/12}, \quad k = 0, 1, \dots, 23.$$

Correction de l'exercice 3.7

Soit le polynôme $P(z) = iz^2 + (4i-3)z + i-5$.

- On sait que dans un polynôme de degré 2 de la forme $ax^2 + bx + c$, le nombre b/a est égal à la somme des racines. Donc celle-ci vaut $S = z_1 + z_2 = (4i-3)/i = 4 + 3i$.
- Le discriminant vaut $\Delta = (4i-3)^2 - 4(i-5) = 13 - 28i$. On a $\Delta = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho = \sqrt{953} \approx 30.87$ et $\theta = \arg(\Delta) \approx 5.147$ rad. On en déduit les racines de P .

4 Binôme de Newton

Correction de l'exercice 4.1

- Quel est le coefficient de x^6 dans le développement de $(x+2)^8$ puis de $(x^2-5)^7$? Calculons

$$(x+2)^8 = \sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} x^k 2^{8-k}.$$

Donc le coefficient de x^6 dans le développement de $(x+2)^8$ est

$$\binom{8}{6} 2^2 = 28 \times 4 = 112.$$

De même,

$$(x^2+5)^7 = \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} x^{2k} (-5)^{7-k}.$$

Donc le coefficient de x^6 dans le développement de $(x^2-5)^7$ est

$$\binom{7}{3} \times (-5)^4 = 21875.$$

- Calculons

$$(x-y)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^k (-y)^{10-k}.$$

Donc le coefficient de $x^3 y^7$ dans le développement de $(x-y)^{10}$ est

$$\binom{10}{3} \times (-1)^7 = -120.$$

3. De même, calculons

$$(2x - y)^{13} = \sum_{k=0}^{13} \binom{13}{k} (2x)^k (-y)^{13-k}.$$

Donc le coefficient de $x^6 y^7$ dans le développement de $(2x - y)^{13}$ est

$$\binom{13}{6} \times 2^6 \times (-1)^7 = -109824.$$

Correction de l'exercice 4.2

1. Calculons

$$(1 + x)^4 = \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} x^{4-k}.$$

2. Calculons

$$(1 + x)^4 (1 + x)^4 = \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} x^k \sum_{\ell=0}^4 \binom{4}{\ell} x^\ell.$$

Le coefficient de x^4 dans le développement de $(1 + x)^4 (1 + x)^4$ est donc la somme des coefficients de tous les termes qui conduisent à x^4 , soit

$$\binom{4}{0} \binom{4}{4} + \binom{4}{1} \binom{4}{3} + \binom{4}{2} \binom{4}{2} + \binom{4}{3} \binom{4}{1} + \binom{4}{4} \binom{4}{0}$$

3. Avec le même raisonnement, le coefficient de x^4 dans le développement de $(1 + x)^8$ est

$$\binom{8}{4}$$

4. On sait que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. On déduit donc de ce qui précède que

$$\binom{4}{0}^2 + \binom{4}{1}^2 + \binom{4}{2}^2 + \binom{4}{3}^2 + \binom{4}{4}^2 = \binom{8}{4}.$$

5. **Généralisation :** on a

$$(1 + x)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^p,$$

et donc

$$(1 + x)^{2n} = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^p \sum_{q=0}^n \binom{n}{q} x^q.$$

Le coefficient du terme x^n est la somme de tous les coefficients qui conduisent à x^n , soit

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0} \binom{n}{n} + \binom{n}{1} \binom{n}{n-1} + \cdots + \binom{n}{n} \binom{n}{0},$$

et en utilisant les symétries des coefficients du binôme on obtient donc

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p}^2.$$

6. En utilisant de nouveau les symétries des coefficients binômiaux, on a

$$S = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{n-k}^2 = \sum_{p=0}^n (n-p) \binom{n}{p}^2.$$

Donc

$$S = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}^2 + \sum_{k=0}^n (n-k) \binom{n}{k}^2 \right) = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = n \binom{2n}{n}.$$

Correction de l'exercice 4.3

Partons de la formule $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ et calculons sa dérivée membre à membre : on obtient

$$n(1+x)^{n-1} = ((1+x)^n)' = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^{k-1},$$

on en déduit

$$S_1 = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k = nx(1+x)^{n-1}.$$

En dérivant encore une fois, on obtient

$$n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2} = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^{k-1}$$

ce qui donne

$$S_2 = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k = nx(1+x)^{n-1} + n(n-1)x^2(1+x)^{n-2} = n(n+1)x(1+x)^{n-2}.$$

En dérivant encore une fois,

$$n(1+x)^{n-1} + 3n(n-1)x(1+x)^{n-2} + n(n-1)(n-2)x^2(1+x)^{n-3} = \sum_{k=0}^n k^3 \binom{n}{k} x^{k-1}$$

on déduit

$$S_3 = \sum_{k=0}^n k^3 \binom{n}{k} x^k = nx(1+x)^{n-1} + 3n(n-1)x^2(1+x)^{n-2} + n(n-1)(n-2)x^3(1+x)^{n-3}$$

Correction de l'exercice 4.4

Démontrer que pour tout $0 \leq k \leq p \leq n$ on a l'égalité Calculons

$$\binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-k-p+k)!} = \frac{n!}{k!(n-p)!}$$

et

$$\binom{p}{k} \binom{n}{p} = \frac{p!}{k!(p-k)!} \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{k!(n-p)!},$$

et on a bien l'égalité cherchée. Calculons

$$\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} = \binom{n}{p} (1+1)^p = 2^p \binom{n}{p}.$$

Correction de l'exercice 4.5

On sait que $1+i = 2e^{i\pi/4}$, donc $(1+i)^n = 2^n e^{in\pi/4} = 2^n (\cos(n\pi/4) + i \sin(n\pi/4))$.

Par ailleurs, on peut aussi écrire

$$(1+i)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k = \left[1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots \right] + i \left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \dots \right].$$

On en déduit donc

$$S_1 = 1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots = 2^n \cos(n\pi/4), \quad S_2 = \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \dots = 2^n \sin(n\pi/4).$$

Correction de l'exercice 4.6

Correction de l'exercice 4.7

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit p un entier tel que $0 \leq p \leq n$.

1. Calculons

$$1 + (1+x) + (1+x)^2 + \dots + (1+x)^n = \frac{1 - (1+x)^{n+1}}{1 - (1+x)} = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{x}.$$

2. Calculons

$$(1+x)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k ,$$

d'où

$$\frac{(1+x)^{n+1} - 1}{x} = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k = \sum_{p=0}^n \binom{n+1}{p+1} x^p$$

Par ailleurs, on a aussi

$$\sum_{k=0}^n (1+x)^k = \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} x^p = \sum_{p=0}^n \left[\sum_{\ell=p}^n \binom{\ell}{p} \right] x^p ,$$

et par identification on a bien

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1} .$$

3. Pour $p = 2$ cette égalité donne

$$\sum_{k=2}^n \binom{k}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n k(k-1) = \binom{n+1}{3} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$$

et pour $p = 3$,

$$\sum_{k=3}^n \binom{k}{3} = \frac{1}{6} \sum_{k=3}^n k(k-1)(k-2) = \binom{n+1}{4} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24}$$

4. Calculons

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = \sum_{\ell=2}^n \ell(\ell-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} ,$$

on en déduit

$$S_2 = \sum_{k=1}^n k^2 = S_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{n(n-1)}{2} = n(n-1) \left[\frac{1}{2} + \frac{n+1}{3} \right] = \frac{n(n-1)(2n+5)}{6} .$$

De même

$$S_3 = \sum_{k=1}^{n-1} k^2(k+1) = \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)(k+2) - 2 \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)(k+2) - 2S_1$$

et

$$S_4 = \sum_{k=1}^n k^3 = S_3 - S_2$$

Correction de l'exercice 4.8

1. Calculons

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ikx} = (1 + e^{ix})^n = e^{inx/2} (e^{ix/2} + e^{-ix/2})^n = 2^n e^{inx/2} \cos^n \left(\frac{x}{2} \right) .$$

On en déduit

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx) = \Re \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ikx} \right) = 2^n \cos \left(\frac{nx}{2} \right) \cos^n \left(\frac{x}{2} \right) ,$$

et

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx) = \Im \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ikx} \right) = 2^n \sin \left(\frac{nx}{2} \right) \cos^n \left(\frac{x}{2} \right)$$

2. Calculons

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \sin(kx) &= - \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx) \right)' \\ &= -2^n \left[-\frac{n}{2} \sin \left(\frac{nx}{2} \right) \cos^n \left(\frac{x}{2} \right) - \frac{n}{2} \sin \left(\frac{x}{2} \right) \cos \left(\frac{nx}{2} \right) \cos^{n-1} \left(\frac{x}{2} \right) \right] \\ &= 2^{n-1} n \cos^{n-1} \left(\frac{x}{2} \right) \left[\sin \left(\frac{nx}{2} \right) \cos \left(\frac{x}{2} \right) + \sin \left(\frac{x}{2} \right) \cos \left(\frac{nx}{2} \right) \right] \\ &= 2^{n-1} n \cos^{n-1} \left(\frac{x}{2} \right) \sin \left(\frac{(n+1)x}{2} \right) \end{aligned}$$

5 Géométrie dans le plan complexe

Correction de l'exercice 5.1

1. $|z - 4| = |z + 2i|$ équivaut à $|z - 4|^2 = |z + 2i|^2$. En développant, on obtient

$$|z|^2 - 8\Re(z) + 16 = |z|^2 + 4\Im(z) - 4 \iff 8\Re(z) + 4\Im(z) - 20 = 0,$$

l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan dont l'axe z vérifie la condition : $|z - 4| = |z + 2i|$ est donc la droite d'équation cartésienne

$$2x + y - 5 = 0.$$

2. Par le calcul $|z - 3|/|z - 5| = 1$ équivaut à $-6\Re(z) + 9 = -10\Re(z) + 25$, soit donc $4\Re(z) = 16$, donc $\Re(z) = 4$. Géométriquement les nombres complexes z tels que $|z - 3|/|z - 5| = 1$ sont les affixes des points se trouvant à égale distance des points $A(3, 0)$ et $B(5, 0)$. C'est donc la médiatrice du segment $[AB]$, c'est à dire la droite d'équation $x = 4$.

De même, l'ensemble des complexes z tels que $|z - a|/|z - b| = 1$ est l'ensemble des affixes des points de la médiatrice de $[AB]$ avec $A(a, 0)$ et $B(b, 0)$. C'est donc l'ensemble des complexes z tels que $\Re(z) = (a + b)/2$. On a supposé ici que a et b sont réels. Si ce sont des complexes, l'ensemble des complexes z tels que $|z - a|/|z - b| = 1$ est l'ensemble des affixes des points de la médiatrice de $[AB]$ où A et B ont pour affixes respectives a et b .

3. On sait que $|1/z| = 1/|z|$, donc $|z| = 1$. Notons $z = e^{i\theta}$, alors

$$z - 1 = e^{i\theta} - 1 = 2ie^{i\theta/2} \sin(\theta/2) \implies |z - 1| = 2 \sin(\theta/2).$$

Par conséquent, $|z - 1| = 1$ équivaut à $\sin(\theta/2) = 1/2$, les solutions sont $\theta = \pi/6$ et $\theta = 5\pi/6$. Donc les valeurs possibles de z

$$z_1 = \frac{\sqrt{3} - i}{2}, \quad z_2 = \frac{\sqrt{3} + i}{2}.$$

4. Posons $z = re^{i\theta}$. Alors

$$z + 4/z = re^{i\theta} + \frac{4}{r}e^{-i\theta} = \left[r + \frac{4}{r}\right] \cos \theta + i \left[r - \frac{4}{r}\right] \sin \theta.$$

Donc $z + 4/z \in \mathbb{R}$ équivaut à $r - 4/r = 0$. Comme $r \in \mathbb{R}^+$, ceci équivaut à $r = 2$. L'ensemble considéré est donc le cercle de rayon 2 centré sur l'origine dans le plan complexe.

5. Par le calcul : $|z - 3|/|z - 5| = \sqrt{2}/2$ équivaut à $|z - 5|^2 = 2|z - 3|^2$. En développant, on obtient

$$|z|^2 - 10\Re(z) + 25 = 2|z|^2 - 12\Re(z) + 18 \iff |z|^2 - 2\Re(z) - 7 = 0.$$

En posant $z = x + iy$, cette équation prend la forme

$$x^2 + y^2 - 2x - 7 = 0,$$

ce qui est l'équation d'un cercle de centre $\Omega(1, 0)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

Géométriquement : l'équation ci-dessous est de la forme

$$|z|^2 - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} + \lambda = 0,$$

où $\omega = 1$ est l'axe du centre du cercle.

Correction de l'exercice 5.2

Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D . On voit facilement que $z_B - z_A$ est l'axe du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$, et que $z_D - z_C$ est l'axe d'un point N tel que $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{CD}$. En notant (r, θ) et (r', θ') les coordonnées angulaires respectives de M et N , on a donc

$$z_B - z_A = re^{i\theta}, \quad z_D - z_C = r'e^{i\theta'},$$

et donc

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \frac{r'}{r} e^{i(\theta' - \theta)}.$$

Or

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \theta' - \theta \pmod{2\pi},$$

et on en déduit le résultat.

Correction de l'exercice 5.3

Soient A et B deux points d'affixes respectives a et b . $|z - a| = |z - b|$ équivaut à dire que le point M d'axe z est à égale distance de A et B , c'est à dire qu'il est sur la médiatrice (Δ) de $[AB]$

Correction de l'exercice 5.4

Soit T l'application du plan qui envoie le point M d'affixe z sur le point M' d'affixe $f(z) = (1+i)z + 1$. En notant $z = a + ib$ on a donc $f(z) = (1+i)(a+ib) + 1 = (a-b+1) + i(a+b)$. On note A le point d'affixe $z_A = 1-i$ et A' l'image de A par T .

1. Calculons l'affixe de A' :

$$f(z_A) = (1+i)(1-i) + 1 = 3.$$

2. Cherchons un point fixe de T : l'équation $f(z) = z$ s'écrit

$$(1+i)z + 1 = z \iff z = i.$$

. T a donc comme unique point fixe le point $F(0, 1)$.

3. Soit $C(x_c, y_c)$ un point du plan, d'affixe c . Le cercle de centre C et de rayon R est l'ensemble des points du plan tels que $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$. Or $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = |z - c|^2$, donc ceci équivaut à $|z - c| = R$, d'où $(z - c) = Re^{it}$, avec $t \in \mathbb{R}$, ce qui donne le résultat.
4. Soit $(\mathcal{C}_A)$ le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$. $(\mathcal{C}_A)$ est l'ensemble des points d'affixe z tel que $z - 1 + i = \sqrt{2}e^{it}$, soit donc $z = 1 - i + \sqrt{2}e^{it}$. Soit $M \in (\mathcal{C}_A)$. Son image par T a pour affixe

$$z' = (1+i) \left(1 - i + \sqrt{2}e^{it} \right) + 1 = 3 + \sqrt{2}e^{it}(1+i) = 3 + 2e^{i(t+\pi/4)},$$

c'est donc le cercle de centre A' et de rayon 2.

5. F est le point fixe de T , donc $F' = F$. Soit $M(x, y)$, d'affixe z et soit $z' = f(z)$ l'affixe de $M' = T(M)$. Calculons

$$\arg \left(\frac{z' - z_{F'}}{z - z_F} \right) = \arg \left(\frac{(1+i)z + 1 - i}{z - i} \right) = \arg \left(\frac{(1+i)(z - i)}{z - i} \right) = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}.$$

T est donc la similitude de centre F , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\pi/4$.

Correction de l'exercice 5.5

Correction de l'exercice 5.6

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x - y + 2, x + y - 3).$$

On identifie $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ par $z = x + iy$.

1. Ecrivons f en complexe : si $z = x + iy$,

$$z' = f(z) = (x - y + 2) + i(x + y - 3) = (1+i)z + (2-3i) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}z + (2-3i).$$

Il s'agit bien d'une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\pi/4$. Son centre est son unique point fixe, tel que

$$(1+i)z + (2-3i) = z \iff z = 3+2i.$$

2. Ecrivons g en complexe : si $z = x + iy$,

$$z' = g(z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{\sqrt{6}}{4}y \right) + i \left(\frac{\sqrt{6}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{4}y \right) = (x + iy) \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + i\sqrt{3}) = z \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\pi/3}$$

Il s'agit donc d'une similitude directe de centre O , d'angle $\pi/4$ et de rapport $\sqrt{2}/2$.

3. On sait que la composée de deux similitudes directes est une similitude directe, dont le rapport est le produit des deux rapports et l'angle la somme des deux angles. Calculons

$$(g \circ f)(z) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\pi/3} \left(\sqrt{2} e^{i\pi/4} z + (2-3i) \right) = e^{7i\pi/12} z + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\pi/3} (2-3i)$$

et

$$(f \circ g)(z) = \sqrt{2} e^{i\pi/4} \frac{z}{\sqrt{2}} e^{i\pi/3} + (2-3i) = e^{7i\pi/12} z + (2-3i).$$

Définir géométriquement, puis à l'aide des complexes, les applications $r = f \circ g$ et $r' = g \circ f$. Calculons maintenant directement

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x, y) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{4}(x - y + 2) - \frac{\sqrt{6}}{4}(x + y - 3), \frac{\sqrt{6}}{4}(x - y + 2) + \frac{\sqrt{2}}{4}(x + y - 3) \right) \\ &= \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} \right) x - \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} \right) y, \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} \right) x + \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} \right) y \right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4} \right) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}, \quad \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4},$$

et donc

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}.\end{aligned}$$