

CUPGE, Aix-Marseille Université

Première année, premier semestre 2015-16

Polynômes, exercices

1 Calculs sur les polynômes

Exercice 1.1

On considère les polynômes

$$P = (1, 2, 3, 4, 5, 0, 0, \dots), \quad Q = (4, 3, 2, 1, 0, 0, \dots).$$

1. Donner les degrés respectifs de P et Q . Calculer $P + Q$ et donner $d^\circ(P + Q)$.
2. Calculer le produit interne PQ ; quel est son degré?
3. Calculer les composés $P \circ Q$ et $Q \circ P$, et donner leurs degrés respectifs.

Exercice 1.2

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit pair si $P(-X) = P(X)$. $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit impair si $P(-X) = -P(X)$.

Soit $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que P est pair si et seulement si $a_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que P est impair si et seulement si $a_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En utilisant la définition du produit interne, montrer que le produit de deux polynômes pairs (resp. impairs) est pair. Que peut-on dire du produit d'un polynôme pair par un polynôme impair?
3. Que peut-on dire de la composition d'un polynôme pair par un polynôme impair? un polynôme impair par un polynôme impair?

Exercice 1.3

Soient $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Montrer que

$$(\lambda P + \mu Q) \circ R = \lambda P \circ R + \mu Q \circ R, \quad \text{et} \quad (P \cdot Q) \circ R = (P \circ R) \cdot (Q \circ R).$$

Exercice 1.4

Soient A, B, C trois villes telles que $d(A, B) = d(B, C)$. Deux voitures se rendent de A à C en passant par B . La première va à la vitesse v de A à B , puis deux fois plus vite ensuite. La deuxième va de A à B à 48 km/h de moyenne, puis roule à la vitesse $(v + 20)$ entre B et C . Les deux voitures mettent le même temps. Calculer v .

Exercice 1.5

Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels λ, μ pour que $X^4 + \lambda X^3 + \mu X^2 + 12X + 4$ soit le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 1.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \exists \tilde{P} \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $\tilde{P}(X^2) = P(X)P(-X)$.
2. Montrer que l'application

$$\phi : P \in \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \phi(P) = \tilde{P} \in \mathbb{K}_n[X]$$

est bien définie, et vérifie

$$\phi(PQ) = \phi(P)\phi(Q).$$

3. A-t-on $\phi(P + Q) = \phi(P) + \phi(Q)$?

Exercice 1.7

1. Soient $U, V \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $U + V$ et $U - V$ sont constants si et seulement si U et V le sont.
2. On suppose $U^2 - V^2$ constant et non nul. Montrer que U et V sont constants.
3. Dire pourquoi $U^2 - V^2 = 0$ n'implique pas que U et V sont constants.

Exercice 1.8

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes de degré n et m respectivement. Déterminer le degré de $P \circ Q$ et de $Q \circ P$.

Exercice 1.9

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^{*2}$ tels que $\alpha \neq \beta$. Soit $A \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $\exists! P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X - \alpha) + P(X - \beta) = A(X)$.

Exercice 1.10

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique $Q_a \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q_a(X - a) = P(X)$. (on dit que $Q(X - a)$ est le développement de P en a .) Déterminer Q_a lorsque $P(X) = X^3 + 2X + 1$ et $a = 1$.

Exercice 1.11

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et soit

$$\Delta : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto \Delta(P) : \quad \Delta(P)(X) = P(X + 1) - P(X) .$$

1. Calculer $\Delta(P)$ lorsque P est un polynôme de degré 0, de degré 1, de degré 2. Comparer $d^\circ(\Delta(P))$ et $d^\circ(P)$ sur ces trois cas particuliers. Formuler un résultat général reliant $d^\circ(\Delta(P))$ et $d^\circ(P)$ si $d^\circ(P) \geq 1$ et démontrer ce résultat.
2. Montrer que $\Delta^2(P) = \Delta(\Delta(P))$ est le polynôme :

$$\Delta^2(P)(X) = P(X + 2) - 2P(X + 1) + P(X) .$$

Donner une expression analogue pour $\Delta^3(P) = \Delta(\Delta(\Delta(P)))$.

3. Que peut-on dire de $\Delta^3(P)$ lorsque $d^\circ(P) = 2$, puis lorsque $d^\circ(P) = 3$?
4. Montrer que pour tout polynôme P de degré 3, on a

$$P(X + 4) + 6P(X + 2) + P(X) = 4[P(X + 3) + P(X + 1)] .$$

2 Division euclidienne, PGCD, PPCM, polynômes de Bézout

Exercice 2.1

Dans $\mathbb{Q}[X]$, effectuer la division euclidienne de $3X^5 + 4X^2 + 1$ par $X^2 + 2X + 3$, de $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 + X + 2$, et de $X^4 - X^3 - X - 2$ par $X^2 - 2X + 4$. Dans $\mathbb{C}[X]$, effectuer la division euclidienne de $4X^3 + X^2$ par $X + 1 + i$.

Exercice 2.2

1. Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme $X^n + X + 1$ par le polynôme $(X - 1)^2$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, quel est le reste de la division de $X^n + X + b$ par $(X - a)^2$?
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que le polynôme $(X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$ est divisible par $X^2 - X + 1$. Trouver le quotient si $n = 2$.

Exercice 2.3

Déterminer $a, b \in \mathbb{Z}$ de façon à ce que le polynôme $aX^{n+1} - bX^n + 1$ soit divisible par le polynôme $(X - 1)^2$. Calculer alors le quotient des deux polynômes.

Exercice 2.4

Soit P un polynôme. Sachant que le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ est 1 et celui de la division de P par $X - b$ est -1 , ($a \neq b$), quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$?

Exercice 2.5

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que les restes des divisions de P par $X^2 + 1$ et $X^2 - 1$ valent respectivement $2X - 2$ et $-4X$. Quel est le reste de la division de P par $X^4 - 1$?

Exercice 2.6

Existe-t-il un polynôme P de degré 7 tel que $(X - 1)^4$ divise $P + 1$ et $(X + 1)^4$ divise $P - 1$?

Exercice 2.7

Soient $A, B, P \in \mathbb{K}[X]$ avec P non constant. Montrer que si $A \circ P$ divise $B \circ P$, alors A divise B . Que peut-on dire de la réciproque ?

Exercice 2.8

Calculer $\text{pgcd}(P, Q)$ lorsque :

1. $P = X^3 - X^2 - X - 2$ et $Q = X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$,
2. $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $Q = X^3 + X + 1$.

Exercice 2.9

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

1. A-t-on $\text{pgcd}(A, B) = 1 \Leftrightarrow \text{pgcd}(A + B, AB) = 1$?
2. A-t-on $\text{pgcd}(A, B) = \text{pgcd}(A + B, AB)$?

Exercice 2.10

Déterminer $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X^3 + 1)A + (X^2 + X + 1)B = 1$.

Exercice 2.11

Soit n un entier positif.

1. Déterminer le PGCD des polynômes $(X^n - 1)$ et $(X - 1)^n$.
2. Déterminer les polynômes de Bézout.

Exercice 2.12

Soient $A = X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 10X - 7$ et $B = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 13X - 10$. Trouver tous les polynômes (pas seulement les polynômes de Bézout) U et V de $\mathbb{R}[X]$ tels que $AU + BV$ soit un pgcd de A et B .

Exercice 2.13

1. Soient $a \in \mathbb{K}^*$ et $n, k \in \mathbb{N}^*$, avec $n < k$. Notons q le quotient et r le reste de la division euclidienne de n par k . Montrer que le reste de la division euclidienne de $X^n - a^n$ par $X^k - a^k$ est égal à $a^{kq}(X^r - a^r)$.
2. Notons $d = \text{pgcd}(n, k)$. Montrer que $\text{pgcd}(X^n - a^n, X^k - a^k) = X^d - a^d$. En déduire que $X^n - 1$ et $X^m - 1$ ont une racine commune différente de 1 si et seulement si $\text{pgcd}(n, m) \neq 1$. Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Exercice 2.14

Montrer que les polynômes complexes $P = X^{1998} + X + 1$ et $Q = X^5 + X + 1$ sont premiers entre eux.

Exercice 2.15

Déterminer tous les polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, premiers entre eux, tels que $P^2 + Q^2 = (X^2 + 1)^2$. En déduire que l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ a une infinité de solutions (non proportionnelles) dans $\mathbb{Z}$.

3 Polynômes irréductibles

Exercice 3.1

Soient A, B et C les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ suivants :

$$A = (X + 3)^2(X + 1)(X^2 + 1)^3, \quad B = (X + 3)^2(X + 2)^2(X^2 + 1), \quad C = (X + 3)(X + 2)(X^2 + 1)^2.$$

1. Combien A possède-t-il de diviseurs normalisés ? et B ? et C ?
2. Ecrire le PGCD et le PPCM de A et B .
3. Ecrire le PGCD et le PPCM des trois polynômes A, B et C .

Exercice 3.2

Soient $P = 2X^4 - 2X^3 + 3X^2 - X + 1$, $Q = X^4 - X^3 + 3X^2 - 2X + 2 \in \mathbb{R}[X]$. Calculer $\text{pgcd}(P, Q)$ et factoriser P et Q en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3.3

Soient P, Q deux polynômes premiers entre eux. Montrer qu'alors P^n et Q^m sont premiers entre eux pour tous n, m entiers positifs.

Exercice 3.4

Factoriser $P = X^4 + X^2 + 1$ et $Q = X^4 - X^2 + 1$ en produit de polynômes irréductibles et unitaires de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que Q est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[X]$.

4 Fonction polynomiale, racines

Exercice 4.1

Trouver les racines complexes de $X^2 - (3 + 4i)X - 1 + 7i$.

Exercice 4.2

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $X^2 + X + 1$ divise $P(X^3) + XQ(X^3)$. Montrer que $P(1) = Q(1) = 0$. Que peut-on dire de la réciproque ?

Exercice 4.3

Soit $P = X^4 + X^3 + X^2 + 3 \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que P n'a pas de racine réelle. P est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 4.4

Soit $P = X^3 - X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Soient $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\text{pgcd}(p, q) = 1$. Montrer que P n'a pas de racine rationnelle et en déduire que P est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 4.5

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q(X) = XP(X) + (2 + 3i) \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que si z est une racine de Q alors $z \notin \mathbb{R}$ et $Q(\bar{z}) \neq 0$.

Exercice 4.6

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $p, q \in \mathbb{C}$ pour que les deux équations $z^4 + 2z^2 + p = 0$ et $z^3 + z + q = 0$ aient deux solutions communes distinctes.

Exercice 4.7

Soit $P = 2X^5 + 5X^4 + 8X^3 + 7X^2 + 4X + 1 \in \mathbb{R}[X]$. Combien P a-t-il de racines multiples dans $\mathbb{C}$? Factoriser P en produit de polynômes irréductibles et unitaires de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4.8

Trouver les polynômes P tels que $P + 1$ soit divisible par $(X - 1)^4$ et $P - 1$ par $(X + 1)^4$:

1. en utilisant la relation de Bézout,
2. En considérant le polynôme dérivé P .

Combien y a-t-il de solutions de degré 7 ?

Exercice 4.9

Trouver tous les polynômes divisibles par leur dérivée.

Exercice 4.10

Résoudre l'équation d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$ suivante :

$$X(X + 1)P'' + (X + 2)P' - P = 0 .$$

Exercice 4.11

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists ! P_n \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P_n - P'_n = X^n$. Calculer P_n .

Corrections rapides

1 Calculs sur les polynômes

Correction de l'exercice 1.1

On considère les polynômes

$$P = (1, 2, 3, 4, 5, \dots), \quad Q = (4, 3, 2, 1, \dots).$$

1. $d^\circ(P) = 4$ et $d^\circ(Q) = 3$. $P + Q = (5, 5, 5, 5, 5, 0, 0, \dots)$ et $d^\circ(P + Q) = 4$.
2. Si $P = \sum_n a_n X^n$ et $Q(X) = \sum_n b_n X^n$, en notant $(PX)(X) = \sum_n c_n X^n$, on obtient en utilisant la forme $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$:

$$PQ = (4, 11, 20, 30, 40, 26, 14, 5)$$

De plus, $d^\circ(PQ) = d^\circ(P) + d^\circ(Q) = 7$

3. On sait que $d^\circ(P \circ Q) = d^\circ(Q \circ P) = d^\circ(P)d^\circ(Q)$, donc $d^\circ(P \circ Q) = d^\circ(Q \circ P) = 12$.

Comme ce calcul est un peu long et ennuyeux, on le raccourcit en prenant $P = (1, 2, 3, 0, 0, \dots)$, donc $d^\circ(P) = 2$ d'où $d^\circ(P \circ Q) = d^\circ(Q \circ P) = 6$.

On a $P(X) = 1 + 2X + 3X^2$ et $Q(X) = 4 + 3X + 2X^2 + X^3$. Donc

$$\begin{aligned}(P \circ Q)(X) &= 1 + 2Q(X) + 3Q(X)^2 \\ &= 1 + 2(4 + 3X + 2X^2 + X^3) + 3(4 + 3X + 2X^2 + X^3)^2 \\ &= 1 + 2(4 + 3X + 2X^2 + X^3) + 3(16 + 9X^2 + 4X^4 + X^6 + 24X + 16X^2 + 8X^3 + 12X^3 + 6X^4 + 4X^5) \\ &= 57 + 78X + 79X^2 + 62X^3 + 30X^4 + 12X^5 + 3X^6\end{aligned}$$

$Q \circ P$ se calcule de la même façon.

Correction de l'exercice 1.2

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit pair si $P(-X) = P(X)$. Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit impair si $P(-X) = -P(X)$.

1. Soit $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$.
— P est pair si et seulement si $P(X) - P(-X) = 0$, ce qui s'écrit

$$\sum_n a_n X^n - \sum_n a_n (-X)^n = 0 \iff \sum_n (1 - (-1)^n) a_n X^n = 0.$$

Ceci est vrai si et seulement si pour tout n , $(1 - (-1)^n) a_n = 0$, qui équivaut à $a_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- P est pair si et seulement si $P(X) + P(-X) = 0$, ce qui s'écrit

$$\sum_n a_n X^n + \sum_n a_n (-X)^n = 0 \iff \sum_n (1 + (-1)^n) a_n X^n = 0.$$

Ceci est vrai si et seulement si pour tout n , $(1 + (-1)^n) a_n = 0$, qui équivaut à $a_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soient $P = \sum a_n X^n$ et $Q = \sum b_n X^n$ deux polynômes pairs, soit $R = PQ = \sum c_n X^n$. Alors

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_p a_{2p} b_{n-2p} \neq 0 \text{ seulement si } n \text{ est pair}$$

donc PQ est pair. De même, si P et Q sont impairs, avec les mêmes notations,

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_p a_{2p+1} b_{n-2p-1} \neq 0 \text{ seulement si } n \text{ est pair}$$

donc PQ est pair. Avec le même raisonnement, si P est pair et Q impair, alors PQ est impair.

3. Supposons $P = (a_0, a_1, \dots)$ pair et $Q = (b_0, b_1, \dots)$ impair. $P \circ Q = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q(X)^n$ ne fait intervenir que des puissances paires de Q . Donc il n'y a que des puissances paires de X , donc $P \circ Q$ est pair. Avec le même raisonnement on montre que $Q \circ P$ est pair.

Correction de l'exercice 1.3

Soient $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a

$$[(\lambda P + \mu Q) \circ R](X) = (\lambda P + \mu Q)(R(X)) = \lambda P(R(X)) + \mu Q(R(X)) = \lambda(P \circ R)(X) + \mu(Q \circ R)(X),$$

ce qui est la propriété cherchée.

De même

$$[(P.Q) \circ R](X) = (PQ)(R(X)) = P(R(X)).Q(R(X)) = [(P \circ R).(Q \circ R)](X) .$$

Correction de l'exercice 1.4

Correction de l'exercice 1.5

Soit $P(X) = X^4 + \lambda X^3 + \mu X^2 + 12X + 4$. Pour que P soit égal au carré d'un polynôme Q , alors nécessairement $d^\circ(Q) = 2$. Soit donc $Q(X) = aX^2 + bX + c$, alors

$$Q(X)^2 = a^2 X^4 + 2abX^3 + (b^2 + 2ac)X^2 + 2bcX + c^2 .$$

Par identification, on a $a^2 = 1$ et $c^2 = 4$. On sait que si Q est solution, alors $-Q$ est solution, on peut donc supposer sans perte de généralité que $a = 1$. On a donc $b = \lambda/2$, $\lambda^2/4 + 2c = \mu$, $bc = 6$ et $c^2 = 4$. On peut distinguer deux cas :

— Si $c = 2$: alors $b = 3$, $\lambda = 6$ et $\mu = 13$. On a alors

$$X^4 + 6X^3 + 13X^2 + 12X + 4 = (X^2 + 3X + 2)^2 .$$

— Si $c = -2$: alors $b = -3$, $\lambda = -6$ et $\mu = 5$. On a alors

$$X^4 - 6X^3 + 5X^2 + 12X + 4 = (X^2 - 3X - 2)^2 .$$

Correction de l'exercice 1.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\forall P \in \mathbb{K}_n[X]$, $\exists \tilde{P} \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $\tilde{P}(X^2) = P(X)P(-X)$. Soit $P(X) = \sum_{n=0}^N a_n X^n$, alors $P(-X) = \sum_{n=0}^N (-1)^n a_n X^n$. Notons $Q(X) = P(X)P(-X) = \sum_{n=0}^{2N} b_n X^n$. Calculons les premiers coefficients pour nous faire une idée :

$$b_0 = a_0^2, \quad b_1 = -a_0 a_1 + a_1 a_0 = 0, \quad b_2 = a_0 a_2 - a_1^2 + a_2 a_0 = a_0 a_2 - a_1^2, \quad b_3 = -a_0 a_3 + a_1 a_2 - a_2 a_1 - a_3 a_0^2 = 0,$$

il semble apparaître que les coefficients b_n avec n impair sont nuls. Montrons le, en calculant

$$b_{2m+1} = \sum_{n=0}^{2m+1} a_n (-1)^{2m+1-n} a_{2m+1-n} = \sum_{n=0}^{2m+1} a_n (-1)^{n-1} a_{2m+1-n}$$

Par un changement d'indice de sommation on a aussi

$$b_{2m+1} = \sum_{k=0}^{2m+1} a_{2m+1-k} (-1)^k a_k = - \sum_{n=0}^{2m+1} a_n (-1)^{n-1} a_{2m+1-n} .$$

On voit donc que $b_{2m+1} = -b_{2m+1}$, soit $b_{2m+1} = 0$ pour tout m . On peut donc écrire

$$P(X)P(-X) = \sum_{m=0}^N b_{2m} X^{2m} = Q(X^2), \quad \text{avec} \quad Q(X) = \sum_{m=0}^N b_{2m} X^m .$$

2. L'application

$$\phi : P \in \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \phi(P) = \tilde{P} \in \mathbb{K}_n[X]$$

est bien définie, via les relations entre coefficients :

$$c_m = b_{2m} = \sum_k a_{2m-k} (-1)^k a_k .$$

De plus,

$$\phi(PQ) = \phi(P)\phi(Q) .$$

3. A-t-on $\phi(P+Q) = \phi(P) + \phi(Q)$?

Correction de l'exercice 1.7

1. Soient $U = (u_0, u_1, \dots), V = (v_0, v_1, \dots) \in \mathbb{K}[X]$. Alors

$$U + V = (u_0 + v_0, u_1 + v_1, \dots), \quad U - V = (u_0 - v_0, u_1 - v_1, \dots) .$$

$U + V$ est constant si et seulement si $u_k + v_k = 0 \forall k \geq 1$, et $U - V$ est constant si et seulement si $u_k - v_k = 0 \forall k \geq 1$. Ceci est vrai si et seulement si $u_k = v_k = 0$ pour tout $k \geq 1$, ce qui équivaut à dire que $U = (u_0, 0, 0, \dots)$ et $V = (v_0, 0, 0, \dots)$ sont constants.

2. On suppose $U^2 - V^2$ constant et non nul. Ceci équivaut à dire que $(U + V)(U - V)$ est constant et non nul, ce qui équivaut à $U + V$ et $U - V$ constants. En effet $d^\circ((U + V)(U - V)) = d^\circ(U + V) + d^\circ(U - V)$ et dire que $U^2 - V^2$ est constant et non nul équivaut à dire que $d^\circ((U + V)(U - V)) = 0$, d'où $d^\circ(U + V) = d^\circ(U - V) = 0$ et donc U et V constants.
3. $U^2 - V^2 = 0$ est possible si $U = V$ ou $U = -V$ et n'implique donc pas que U et V soient constants.

Correction de l'exercice 1.8

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes de degré n et m respectivement. Alors le terme de plus haut degré de $P \circ Q$ est égal au terme de plus haut degré de Q^n qui est X^{mn} . Donc $d^\circ(P \circ Q) = mn$. On fait le même raisonnement pour $Q \circ P$.

Correction de l'exercice 1.9

Correction de l'exercice 1.10

Soit $P(X) = \sum_{n=0}^N q_n X^n$, où $N = d^\circ(P)$. Cherchons Q_a sous la forme $Q_a(X) = \sum_n q_n X^n$. Nécessairement, on doit avoir $d^\circ(Q_a) = d^\circ(P) = N$.

En utilisant la formule du binôme, on a

$$Q_a(X - a) = \sum_{n=0}^N q_n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (-a)^{n-k}$$

Cette somme peut aussi s'écrire

$$Q_a(X - a) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^N q_n \binom{n}{k} (-a)^{n-k} \right) X^k$$

Par identification, on voit que nécessairement, pour tout $k = 0, \dots, N$,

$$\sum_{n=k}^N q_n \binom{n}{k} (-a)^{n-k} = p_k.$$

En particulier, on a pour $n = N$

$$q_N = p_N;$$

aussi, pour $k = N - 1$,

$$q_{N-1} \binom{N-1}{N-1} (-a)^0 + q_N \binom{N}{N-1} (-a)^1 = p_{N-1}, \quad \text{d'où} \quad q_{N-1} = p_{N-1} - Nq_N = p_{N-1} - Np_N$$

De façon similaire, on en déduit une relation de récurrence descendante

$$q_k = p_k - \sum_{n=k+1}^N q_n \binom{n}{k} (-a)^{n-k},$$

qui permet à chaque étape de calculer q_k à partir de $q_{k+1} \dots q_N$.

Considérons le cas $P(X) = X^3 + 2X + 1$ et $a = 1$. On a $p_0 = 1$, $p_1 = 2$, $p_2 = 0$ et $p_3 = 1$. On en déduit

$$q_3 = p_3 = 1, \quad q_2 = p_2 - \binom{3}{2} (-1) q_3 = 3, \quad q_1 = p_1 - \binom{2}{1} (-1) q_2 - \binom{3}{1} q_3 = 5,$$

et

$$q_0 = p_0 - \binom{1}{0} q_1 + \binom{2}{0} q_2 - \binom{3}{0} q_3 = -1.$$

Correction de l'exercice 1.11

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et soit

$$\Delta : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto \Delta(P) : \quad \Delta(P)(X) = P(X + 1) - P(X).$$

1. Si P est un polynôme de degré 0, donc constant, $\Delta(P) = 0$. Si P est un polynôme de degré 1, $P(X) = a_0 + a_1 X$ alors $\Delta(P)(X) = a_1$. Si P est un polynôme de degré 2, $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$, alors $\Delta(P)(X) = a_1 + a_2[(X + 1)^2 - X^2] = 2 + a_1 + 2a_2 X$.

Dans les trois cas, on a $d^\circ(\Delta(P)) = d^\circ(P) - 1$, sauf pour $d^\circ(P) = 0$. On peut conjecturer que dans tous les cas, sauf ce dernier, on a

$$d^\circ(\Delta(P)) = d^\circ(P) - 1.$$

Pour le démontrer, soit

$$P(X) = \sum_{n=0}^N a_n X^n.$$

Alors

$$\Delta(P)(X) = \sum_{n=0}^N a_n ((X+1)^n - X^n) .$$

Sans effectuer le calcul complet, on peut vérifier en utilisant la formule du binôme par exemple que pour tout n , $(X+1)^n - X^n$ est un polynôme de degré $n-1$. Par conséquent, $\Delta(P)$ est somme de polynômes de degrés $0, 1, 2, \dots, N-1$, c'est donc un polynôme de degré $N-1$.

2. Calculons

$$\Delta^2(P)(X) = (\Delta(P))(X+1) - (\Delta(P))(X) = (P(X+2) - P(X+1)) - (P(X+1) - P(X)) = P(X+2) - 2P(X+1) + P(X) .$$

De même, on montre que

$$(\Delta^3(P))(X) = P(X+3) - 3P(X+2) + 3P(X+1) - P(X) ,$$

et plus généralement on verra apparaître les coefficients binômiaux.

3. Que peut-on dire de $\Delta^3(P)$ Lorsque $d^\circ(P) = 2$, $\Delta^3(P) = 0$. Lorsque $d^\circ(P) = 3$, $\Delta^3(P)$ est constant, mais $\Delta^4(P) = 0$.

4. Un calcul explicite montre que

$$(\Delta^4(P))(X) = P(X+4) - 4P(X+3) + 6P(X+2) - 4P(X+1) + P(X) .$$

Donc si P est un polynôme de degré 3, alors $\Delta^4(P) = 0$ et

$$P(X+4) - 4P(X+3) + 6P(X+2) - 4P(X+1) + P(X) = 0 ,$$

ce qui équivaut à

$$P(X+4) + 6P(X+2) + P(X) = 4[P(X+3) + P(X+1)] .$$

2 Division euclidienne, PGCD, PPCM, polynômes de Bézout

Correction de l'exercice 2.1

Effectuer la division euclidienne de $3X^5 + 4X^2 + 1$ par $X^2 + 2X + 3$ dans $\mathbb{Q}[X]$, et de $4X^3 + X^2$ par $X + 1 + i$ dans $\mathbb{C}[X]$.

$3X^5$	$+4X^2$	$+1$	X^2	$+2X$	$+3$
$3X^5$	$+6X^4$	$+9X^3$	$3X^3$	$-6X^2$	$+3X + 16$
	$-6X^4$	$-9X^3$		$+4X^2$	$+1$
	$-6X^4$	$-12X^3$		$-18X^2$	
		$3X^3$		$+22X^2$	$+1$
		$3X^3$		$+6X^2$	$+9X$
				$16X^2$	$-9X + 1$
				$16X^2$	$+32X + 48$
				$-41X$	-47

On peut donc écrire

$$3X^5 + 4X^2 + 1 = (3X^3 - 6X^2 + 3X + 16)(X^2 + 2X + 3) + (-41X - 47)$$

De même, on obtient

$$3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1 = (3X^2 + 2X - 3)(X^3 + X + 2) + (-9X^2 - X + 7) ,$$

$$X^4 - X^3 - X - 2 = (X^2 + X - 2)(X^2 - 2X + 4) + (9 - 9X) ,$$

$$4X^3 + X^2 = (4 * X^2 + (-4i - 3) * X + 7i - 1)(X + 1 + i) + (8 - 6i) .$$

Correction de l'exercice 2.2

1. Pour m quelconque, $X^m - 1$ s'annule pour $X = 1$, donc $X^m - 1$ est divisible par $X - 1$. En fait on a

$$X^m - 1 = (X - 1)(X^{m-1} + X^{m-2} + \dots + 1) = (X - 1)Q_m(X)$$

donc le reste de la division de X^m par $x - 1$ vaut 1. Par ailleurs

$$\begin{aligned} X^n + X + 1 &= (X - 1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + 1) + X + 2 \\ &= (X - 1)((X - 1)Q_{n-1}(X) + 1 + (X - 1)Q_{n-2}(X) + 1 + \cdots + 1) + X + 2 \\ &= (X - 1)^2 Q(X) + n(X - 1) + X + 2 \\ &= (X - 1)^2 Q(X) + (n + 1)X + (2 - n) \end{aligned}$$

Donc le reste de la division euclidienne du polynôme $X^n + X + 1$ par le polynôme $(X - 1)^2$ est $(n + 1)X + (2 - n)$.

2. Posons $Y = X/a$. On a comme ci-dessus, pour tout m ,

$$Y^m = (Y - 1)P_{m-1}(Y) + 1$$

et donc

$$Y^n = (Y - 1)^2 P(Y) + nY + (1 - n) .$$

En multipliant par a^n , on obtient

$$X^n = (X - a)^2 Q(X) + na^{n-1}X + (1 - n)a^n ,$$

d'où

$$X^n + X + b = (X - a)^2 Q(X) + [1 + na^{n-1}]X + [b + (1 - n)a^n] ,$$

pour un certain polynôme $Q(X)$ qu'il est inutile d'expliciter. Le reste vaut donc

$$R(X) = [1 + na^{n-1}]X + [b + (1 - n)a^n] .$$

3. Montrons par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $(X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$ est divisible par $X^2 - X + 1$.

— Initialisation : la propriété est vraie pour $n = 0$.

— Hérédité : supposons qu'il existe $Q(X)$ tel que

$$(X - 1)^{n+1} + X^{2n-1} = Q(X)(X^2 - X + 1) .$$

Calculons

$$\begin{aligned} (X - 1)^{n+2} + X^{2n+1} &= (X - 1)(X - 1)^{n+1} + X^{2n+1} \\ &= (X - 1)(Q(X)(X^2 - X + 1) - X^{2n-1}) + X^{2n+1} \\ &= Q(X)(X^2 - X + 1) - X^{2n} + X^{2n-1} + X^{2n+1} \\ &= [Q(X) + X^{2n-1}](X^2 - X + 1) , \end{aligned}$$

ce qui est la propriété recherchée. L'hérédité est donc démontrée.

Dans le cas $n = 2$, il suffit de faire la division euclidienne, et on obtient

$$(X - 1)^4 + X^3 = X^3 + 2X^2 - 3X + 1 .$$

Correction de l'exercice 2.3

On a vu dans l'exercice précédent que pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme Q_{m-2} tel que

$$X^m = (X - 1)^2 Q_{m-2}(X) + mX + (1 - m)$$

On peut donc calculer

$$\begin{aligned} aX^n - bX^{n-1} + 1 &= (X - 1)^2 [aQ_{n-2}(X) - bQ_{n-3}(X)] + [a(n + 1)X - n] - b[nX - (n - 1)] + 1 \\ &= (X - 1)^2 [aQ_{n-2}(X) - bQ_{n-3}(X)] + [a(n + 1) - bn]X + [-an - b(1 - n) + 1] \end{aligned}$$

Le polynôme $aX^{n+1} - bX^n + 1$ est donc divisible par le polynôme $(X - 1)^2$ si et seulement si

$$a(n + 1) - bn = 0 \quad \text{et} \quad an + b(1 - n) = 1$$

La solution de ce système est alors $a = n$ et $b = n + 1$.

Calculer alors le quotient des deux polynômes.

Correction de l'exercice 2.4

Soit P un polynôme tel que le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ est 1 et celui de la division de P par $X - b$ est -1 ($a \neq b$). Ecrivons donc

$$P(X) = Q_1(X)(X - a) + 1 = Q_2(X)(X - b) - 1 .$$

Ecrivons aussi la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-a)(X-b)$:

$$P(X) = Q(X)(X-a)(X-b) + R(X) ,$$

on sait que $d^\circ(R) < 2$, donc on peut chercher R sous la forme

$$R(X) = \alpha + \beta X .$$

On sait alors que

$$P(a) = \alpha + \beta a = 1 , \quad P(b) = \alpha + \beta b = -1 ,$$

d'où le système

$$\begin{cases} \alpha + a\beta = 1 \\ \alpha + b\beta = -1 \end{cases}$$

dont la solution est donnée par

$$\beta = \frac{2}{a-b} , \quad \alpha = \frac{-a-b}{a-b}$$

Le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ vaut donc

$$R(X) = \frac{1}{a-b} [-(a+b) + 2X] .$$

Correction de l'exercice 2.5

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que les restes des divisions de P par X^2+1 et X^2-1 valent respectivement $2X-2$ et $-4X$. Ecrivons la division euclidienne

$$P(X) = (X^4-1)Q(X) + R(X) , \quad \text{avec} \quad d^\circ(R) \leq 3 .$$

Ecrivons donc

$$R(X) = \alpha + \beta X + \gamma X^2 + \delta X^3 .$$

On sait que

$$P(1) = -4 \implies \alpha + \beta + \gamma + \delta = -4 , \quad P(-1) = 4 \implies \alpha - \beta + \gamma - \delta = 4 ,$$

et

$$P(i) = 2i - 2 \implies \alpha + i\beta - \gamma - i\delta = 2i - 2 , \quad P(-i) = 0 \implies \alpha - i\beta - \gamma + i\delta = -2i - 2 ,$$

d'où les systèmes

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \delta = -2 \end{cases} , \quad \begin{cases} \alpha - \gamma = -2 \\ \beta - \delta = 2 \end{cases}$$

Par conséquent, on obtient $\alpha = -1$, $\gamma = 1$, et $\beta = -1$ et $\delta = -3$.

Correction de l'exercice 2.6

Cherchons un polynôme P tel que $(X-1)^4$ divise $P+1$ et $(X+1)^4$ divise $P-1$. Si il existe un tel P , alors il existe $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$P(X) + 1 = A(X)(X-1)^4 \quad \text{et} \quad P(X) - 1 = B(X)((X+1)^4 .$$

On remarque alors que

$$\frac{1}{2}A(X)(X-1)^4 - \frac{1}{2}B(X)((X+1)^4 = 1 .$$

Comme $X-1$ et $X+1$ sont premiers entre eux, $(X-1)^4$ et $(X+1)^4$ sont eux aussi premiers entre eux et la relation ci-dessus est la relation définissant les polynômes de Bézout : $2A$ et $-B$ sont les polynômes de Bézout associés à $(X-1)^4$ et $(X+1)^4$. On sait qu'il existe de tels polynômes de degré au plus égal à 3, donc P est de degré 7.

Correction de l'exercice 2.7

Correction de l'exercice 2.8

Calculs de PGCD(P, Q) :

- $P = X^3 - X^2 - X - 2$ et $Q = X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$,
 — $P = Q_0Q + R_1$, avec $Q_0 = 0$ et $R_1 = P$.
 — $Q = Q_1P + R_2$ avec $Q_1(X) = X^2 - X$ et $R_2(X) = 2X^2 - 3X - 2$.
 — $R_1 = Q_2R_2 + R_3$ avec $Q_2(X) = \frac{2X+1}{4}$ et $R_3(X) = \frac{3X-6}{4}$.
 — $R_2 = Q_3R_3 + R_4$ avec $Q_3(X) = \frac{8X+4}{3}$ et $R_4 = 0$.
 Donc un PGCD est $\frac{3X-6}{4}$, on peut prendre $X-2$.
- $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $Q = X^3 + X + 1$.
 — $P = Q_0Q + R_1$, avec $Q_0(X) = X + 1$ et $R_1(X) = -X^2 - 4X$.
 — $Q = Q_1P + R_2$ avec $Q_1(X) = 4 - X$ et $R_2(X) = 17X + 1$.
 — $R_1 = Q_2R_2 + R_3$ avec $Q_2(X) = -\frac{17X+67}{289}$ et $R_3(X) = \frac{67}{289}$.
 R_3 est de degré 0, donc P et Q sont premiers entre eux.

Correction de l'exercice 2.9

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

- Supposons que $\text{PGCD}(A+B, AB) = 1$. Comme il est clair que $\text{PGCD}(A, B)$ divise $A+B$ et AB , on a $\text{PGCD}(A, B)$ divise $\text{PGCD}(A+B, AB)$. Donc $\text{PGCD}(A, B) = 1$.
Supposons maintenant que $\text{PGCD}(A, B) = 1$, alors $\text{PGCD}(A+B, A) = \text{PGCD}(A, B) = 1$ et $\text{PGCD}(A+B, B) = \text{PGCD}(A, B) = 1$, c'est-à-dire $A+B$ est premier avec A et avec B , $A+B$ est premier avec le produit AB .
Finalement $\text{PGCD}(A+B, AB) = 1$.
- Par contre, on n'a pas nécessairement $\text{PGCD}(A, B) = \text{PGCD}(A+B, AB)$. Nous allons le prouver par un contre exemple. Prenons $A = X$ et $B = X(X-1)$, on a $\text{PGCD}(A, B) = X$ et $\text{PGCD}(A+B, AB) = \text{PGCD}(X^2, X^2(X-1)) = X^2$.

Correction de l'exercice 2.10

Déterminer $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X^3 + 1)A + (X^2 + X + 1)B = 1$.

Soient $P(X) = X^3 + 1$ et $Q(X) = X^2 + X + 1$.

— On a $P(X) = Q_0(X)Q(X) + R_1(X)$, avec $Q_0(X) = X$ et $R_1(X) = (X^3 + 1) - X(X^2 + X + 1) = -X^2 - X + 1$.

— De même, $Q(X) = Q_1(X)R_1(X) + R_2(X)$ avec $Q_1(X) = -1$ et $R_2(X) = (X^2 + X + 1) + (-X^2 - X + 1) = 2$

Donc P et Q sont premiers entre eux. On a

$$2 = Q - Q_1 R_1 = Q - Q_1(P - Q_0 Q) = -Q_1 P + (1 + Q_0 Q_1) Q.$$

De là on tire

$$-P(X) + (1 - X)Q(X) = 2,$$

d'où

$$A(X) = -\frac{1}{2}, \quad B(X) = \frac{1-X}{2}.$$

Correction de l'exercice 2.11

Correction de l'exercice 2.12

Soient $A(X) = X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 10X - 7$ et $B(X) = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 13X - 10$. Les divisions euclidiennes successives donnent

$$\begin{aligned} A &= Q_0 B + R_1, & Q_0(X) &= 1, & R_1(X) &= X^2 - 3X + 3 \\ B &= Q_1 R_1 + R_2, & Q_1(X) &= X^2 + X - 3, & R_2(X) &= X - 1 \\ R_1 &= Q_2 R_2 + R_3, & Q_2(X) &= X - 2, & R_3(X) &= 1. \end{aligned}$$

Donc A et B sont premiers entre eux.

Cherchons les polynômes de Bézout : on a

$$R_3 = R_1 - Q_2 R_2 = R_1 - Q_2(B - Q_1 R_1) = -Q_2 B + (1 + Q_1 Q_2)(A - Q_0 B) = (1 + Q_1 Q_2)A - (Q_0 + Q_2 + Q_0 Q_1 Q_2)B.$$

Les polynômes de Bézout sont donc

$$U_0(X) = 1 - Q_1(X)Q_2(X) = -X^2 - X + 4$$

$$V_0(X) = -(Q_0(X) + Q_2(X) + Q_0(X)Q_1(X)Q_2(X)) = -X^3 + X^2 + 4X - 5$$

Soient maintenant U, V tels que $AU + BV = R_3$. On a alors

$$A(U - U_0) + B(V - V_0) = 0.$$

A et B étant premiers entre eux, $U - U_0$ doit être multiple de B : $U = U_0 + QB$, d'où $V = V_0 - QA$.

Correction de l'exercice 2.13

- Soient $a \in \mathbb{K}^*$ et $n, k \in \mathbb{N}^*$, avec $n > k$. Notons q le quotient et r le reste de la division euclidienne de n par k . On a donc

$$n = qk + r.$$

Ecrivons

$$X^n - a^n = X^{qk} X^r - a^n = (X^{qk} - a^{qk}) X^r + a^{qk} (X^r - a^r)$$

Maintenant, soit $Y = X/a$, notons que

$$X^{qk} - a^{qk} = a^{qk} [(Y^k)^q - 1] = a^{qk} (Y^k - 1) [1 + Y^k + Y^{2k} + \dots + Y^{(q-1)k}] = (X^k - a^k) Q(X)$$

est divisible par $X^k - a^k$. Comme le degré de $(X^r - a^r)$ est inférieur à k , on a bien montré que le reste de la division euclidienne de $X^n - a^n$ par $X^k - a^k$ est égal à $a^{qk}(X^r - a^r)$.

2. On peut poursuivre le même raisonnement et utiliser l'algorithme d'Euclide : en posant $q_0 = q$ et $r_1 = r$, on écrit

$$\begin{aligned} X^n - a^n &= (X^k - a^k) Q_0(X) + a^{q_0 k} (X^{r_1} - a^{r_1}) \\ a^{q_0 k} (X^k - a^k) &= (X^{r_1} - a^{r_1}) Q_1(X) + a^{q_0 k} a^{q_1 r_1} (X^{r_2} - a^{r_2}) \\ a^{q_0 k} a^{q_1 r_1} (X^{r_1} - a^{r_1}) &= (X^{r_2} - a^{r_2}) Q_2(X) + a^{q_0 k} a^{q_1 r_1} a^{q_2 r_2} (X^{r_3} - a^{r_3}) \\ &\vdots = \vdots \end{aligned}$$

et la division s'arrête au premier reste nul, c'est à dire quand $r_{n+1} = 0$. En notant $d = \text{pgcd}(n, k)$, le dernier reste non nul est $X^d - a^d$.

Correction de l'exercice 2.14

Correction de l'exercice 2.15

3 Polynômes irréductibles

Correction de l'exercice 3.1

Soient A , B et C les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ suivants :

$$A = (X + 3)^2 (X + 1) (X^2 + 1)^3, \quad B = (X + 3)^2 (X + 2)^2 (X^2 + 1), \quad C = (X + 3) (X + 2) (X^2 + 1)^2.$$

1. A possède 6 facteurs irréductibles. Le nombre de diviseurs normalisés est égal au nombre de parties de cet ensemble. Combien A possède-t-il de diviseurs normalisés ? et B ? et C ?
2. Un PGCD de A et B est

$$P(X) = (X + 3)^2 (X^2 + 1)$$

et un PPCM est

$$p(X) = (X + 3)^2 (X + 1) (X + 2)^2 (X^2 + 1)^3$$

3. Un PGCD de A, B et C est

$$P(X) = (X + 3) (X^2 + 1)$$

et un PPCM de A, B et C est

$$p(X) = (X + 3)^2 (X + 1) (X + 2)^2 (X^2 + 1)^3$$

Correction de l'exercice 3.2

Soient $P = 2X^4 - 2X^3 + 3X^2 - X + 1$, $Q = X^4 - X^3 + 3X^2 - 2X + 2 \in \mathbb{R}[X]$. Calculons

$$\begin{aligned} P &= A_0 Q + R_1, \quad A_0(X) = 2, \quad R_1(X) = -3X^2 + 3X - 3 \\ Q &= A_1 R_1 + R_2, \quad A_1(X) = -\frac{X^2+2}{3}, \quad R_2(X) = 0 \end{aligned}$$

Un PGCD unitaire est donc $X^2 - X + 1$, qui est irréductible sur $\mathbb{R}$ (son discriminant est négatif). Par ailleurs,

$$P(X) = (X^2 - X + 1)(2X^2 + 1), \quad Q(X) = (X^2 - X + 1)(X^2 + 1)$$

tous les facteurs sont irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Correction de l'exercice 3.3

Soient P, Q deux polynômes premiers entre eux. Alors ils se factorisent sous la forme

$$P = ap_1 p_2 \dots p_K, \quad Q = bq_1 q_2 \dots q_L$$

où $a, b \in \mathbb{K}$, tous les p_k et q_ℓ sont des polynômes irréductibles unitaires, et $p_k \neq q_\ell$ pour tous k, ℓ . Alors

$$P^n = a^n p_1^n p_2^n \dots p_K^n, \quad Q^m = b^m q_1^m q_2^m \dots q_L^m$$

Aucun facteur irréductible de P ne divise Q et vice versa, donc P^n et Q^m sont premiers entre eux.

Correction de l'exercice 3.4

— Soit $P = X^4 + X^2 + 1$, cherchons les racines. En posant $x = X^2$, Le discriminant vaut $\Delta = -3$, les racines sont $(-1 \pm i\sqrt{3})/2$, soit $e^{2i\pi/3}$ et $e^{4i\pi/3}$. Les racines de P sont donc $\pm e^{i\pi/3}$ et $\pm e^{2i\pi/3}$, et on a la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

$$P(X) = (X - e^{i\pi/3})(X + e^{i\pi/3})(X - e^{2i\pi/3})(X + e^{2i\pi/3})$$

Calculons maintenant

$$(X - e^{i\pi/3})(X + e^{2i\pi/3}) = X^2 + X(e^{i\pi/3} - e^{2i\pi/3}) + 1 = X^2 + X + 1$$

$$(X + e^{i\pi/3})(X - e^{2i\pi/3}) = X^2 + X(e^{2i\pi/3} - e^{i\pi/3}) + 1 = X^2 - X + 1$$

On a donc

$$P(X) = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1),$$

et les deux facteurs sont irréductibles sur $\mathbb{R}$.

- Soit $Q = X^4 - X^2 + 1$. En posant $x = X^2$, Le discriminant vaut $\Delta = -3$, les racines sont $(1 \pm i\sqrt{3})/2$, soit $e^{i\pi/3}$ et $e^{5i\pi/3}$. Les racines de P sont donc $\pm e^{i\pi/6}$ et $\pm e^{5i\pi/6}$, et on a la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

$$Q(X) = (X - e^{i\pi/6})(X + e^{i\pi/6})(X - e^{5i\pi/6})(X + e^{5i\pi/6})$$

Calculons maintenant

$$(X - e^{i\pi/6})(X - e^{5i\pi/6}) = X^2 - X\sqrt{3} - 1, \quad (X + e^{i\pi/6})(X + e^{5i\pi/6}) = X^2 + X\sqrt{3} - 1$$

on a donc la factorisation en polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$

$$Q(X) = (X^2 + X\sqrt{3} - 1)(X^2 - X\sqrt{3} - 1)$$

Q ne possède aucune factorisation non triviale dont tous les coefficients soient rationnels. Donc Q est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[X]$.

4 Fonction polynomiale, racines

Correction de l'exercice 4.1

Solution : les racines complexes de $X^2 - (3 + 4i)X - 1 + 7i$ sont

$$\alpha_1 = 2 + i, \quad \alpha_2 = 1 + 3i.$$

Correction de l'exercice 4.2

Correction de l'exercice 4.3

Correction de l'exercice 4.4

Correction de l'exercice 4.5

Correction de l'exercice 4.6

Correction de l'exercice 4.7

Correction de l'exercice 4.8

Correction de l'exercice 4.9

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, soit P' le polynôme dérivé :

$$P(X) = \sum_{n=0}^N a_n X^n, \quad P'(X) = \sum_{n=1}^N n a_n X^{n-1}.$$

Si P est divisible par P' , alors il existe Q tel que $P = QP'$. Nécessairement le degré de Q doit être égal à 1, donc $Q(X) = c(X - \alpha)$. Par identification, on trouve $c = N$, donc on a nécessairement $Q(X) = N^{-1}(X - \alpha)$.

Réolvons l'équation ainsi obtenue :

$$NP(x) = (x - \alpha)P'(x)$$

conduit à

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{N}{x - \alpha} \quad \Longleftrightarrow \quad (\ln(P(x)))' = N \left(\frac{1}{x - \alpha} \right)'$$

dont les solutions sont de la forme

$$P(x) = k(x - \alpha)^N$$

Correction de l'exercice 4.10

Considérons l'équation d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$ suivante :

$$X(X+1)P'' + (X+2)P' - P = 0 .$$

Soit

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{n=0}^N a_n x^n \\ P'(x) &= \sum_{n=1}^N n a_n x^{n-1} \\ (x+2)P'(x) &= \sum_{n=1}^N n a_n x^n + \sum_{n=1}^N 2n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^N n a_n x^n + \sum_{n=0}^{N-1} 2(n+1) a_{n+1} x^n \\ P''(x) &= \sum_{n=2}^N n(n-1) a_n x^{n-2} \\ x(x+1)P''(x) &= \sum_{n=0}^N n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=2}^N n(n-1) a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^N n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{N-1} (n+1) n a_{n+1} x^n \end{aligned}$$

En reportant ces expressions dans l'équation considérée, on obtient

$$\sum_{n=0}^{N-1} [n(n-1) + n-1] a_n + [n(n+1) + 2(n+1)] a_{n+1} x^n + [N(N-1) + N-1] a_N x^N = 0 ,$$

soit en simplifiant

$$\sum_{n=0}^{N-1} [(n+1)(n-1) a_n + (n+1)(n+2) a_{n+1}] x^n + (N+1)(N-1) a_N x^N = 0 .$$

Ceci équivaut aux relations

$$a_{n+1} = -\frac{n-1}{n+2} a_n , \quad (N+1)(N-1) a_N = 0 .$$

La seconde équation implique $N = 1$, et la première donne $a_1 = a_0/2$. Les seules solutions possibles sont de la forme

$$P_1(x) = a_0 + \frac{a_2}{2} x .$$

On vérifie directement que ce sont bien des solutions.

Correction de l'exercice 4.11

Cherchons P_n tel que $P_n - P'_n = X^n$, sous la forme

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k .$$

Alors

$$P_n(x) - P'_n(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k - \sum_{k=1}^N k a_k x^{k-1} = a_N x^N + \sum_{k=0}^{N-1} (a_k - (k+1) a_{k+1}) x^k .$$

On en déduit que $N = n$, $a_n = 1$, et la relation de récurrence

$$(k+1) a_{k+1} = a_k ,$$

d'où on déduit

$$a_n = 1 , \quad a_{n-1} = n , \quad a_{n-2} = n(n-1) ,$$

Ceci suggère l'expression

$$a_k = \frac{n!}{k!}$$

qui se démontre par récurrence descendante. On a donc une solution unique.