Géométrie et Polynômes

—–

CUPGE
Aix-Marseille Université

B. Torrésani

Année 2015-16

Table des matières

Chapitre

1 Géométrie

1.1 Vecteurs et opérations

1.1.1 Vecteurs, opérations

Vecteurs de $\mathbb{R}^2$ Un vecteur de $\mathbb{R}^2$ est un couple de réels $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On définit les opérations suivantes sur les vecteurs de $\mathbb{R}^2$:

— Addition : étant donnés $\vec{u} = (x, y), \vec{v} = (x', y') \in \mathbb{R}^2$, leur somme $\vec{u} + \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ est donnée par

$$\vec{u} + \vec{v} = (x + x', y + y')$$

— Multiplication scalaire : pour tous $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, le produit $\lambda\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ est défini par

$$\lambda\vec{u} = (\lambda x, \lambda y) \ .$$

Donc en notant $\vec{\imath} = (1, 0)$ et $\vec{\jmath} = (0, 1)$, on a

$$\vec{u} = (x, y) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \, .$$

On dit que la famille $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Vecteurs de $\mathbb{R}^3$ Un vecteur de $\mathbb{R}^3$ est un triplet de réels $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Les opérations sont définies de façon similaire aux précédentes :

— Addition : à $\vec{u} = (x, y, z), \vec{v} = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, on associe leur somme

$$\vec{u} + \vec{v} = (x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$

— Multiplication scalaire : à tous $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on associe le produit $\lambda\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ défini par

$$\lambda\vec{u} = \lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \ .$$

Donc en notant maintenant $\vec{\imath} = (1, 0, 0)$, $\vec{\jmath} = (0, 1, 0)$, et $\vec{k} = (0, 0, 1)$ on a

$$\vec{u} = (x, y, z) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \ .$$

On dit que la famille $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Propriétés L'addition des vecteurs et la mulitiplication par un scalaire possèdent des propriétés génériques, qui ne dépendent pas de la taille du vecteur. Les propriétés énoncées ci-dessous sont valables dans $\mathbb{R}^2$ comme dans $\mathbb{R}^3$.

1. Commutativité : $\forall \vec{u}, \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
2. Associativité : $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$,

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

.

3. Distributivité : $\forall \vec{u}, \vec{v}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u}+\alpha\vec{v} \ , \quad \text{et} \quad (\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u}+\beta\vec{u} \ .$$

4. Commutativité mixte : $\forall \vec{u}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u} \ .$$

1.1.2 Interprétation géométrique

Dans le plan, étant donnée une origine O, on associe au vecteur $\vec{u} = (x, y)$ le point $M(x, y)$ du plan de coordonnées (x, y). On a donc $O(0, 0)$, et ainsi $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. D'après le théorème de Pythagore, la longueur du segment $[OM]$ vaut $OM = \sqrt{x^2+y^2}$.

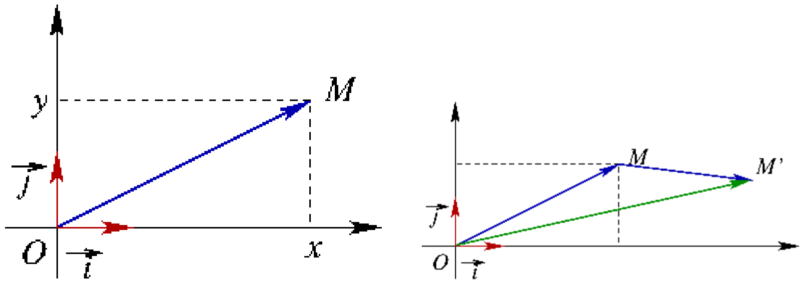

FIGURE 1.1 – Correspondance entre vecteur de $\mathbb{R}^2$ et point du plan (gauche), et illustration de la relation de Chasles (droite).

On rappelle la relation de Chasles : étant donnés trois points A, B et C (du plan ou de l'espace), on a

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \ .$$

Etant donnés deux points du plan $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$, la relation de Chasles donne

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) \ .$$

Dans l'espace, ayant choisi une origine $O(0, 0, 0)$, on associe cette fois à tout vecteur $\vec{v} = (x, y, z)$ le point $M(x, y, z)$ de l'espace, de sorte que $\overrightarrow{OM} = (x, y, z) = \vec{v}$. On peut montrer que la longueur du segment $[OM]$ vaut $OM = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

1.1.3 Norme et produit scalaire

Définition 1.1 (Norme) *1. Soit $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Sa norme est le réel positif $\|\vec{u}\|$ donné par*

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2} \in \mathbb{R}^+ \ .$$

2. Soit $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Sa norme est le réel positif donné par

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \in \mathbb{R}^+ \ .$$

La norme possède les propriétés importantes suivantes

Propriétés 1.1 1. Dans le plan, la norme d'un vecteur $\vec{u} = (x, y)$ coincide avec la longueur du segment $[OM]$ où le point M est défini par $\overrightarrow{OM} = (x, y)$. C'est le théorème de Pythagore. Dans l'espace, cette propriété reste vraie.

2. Si $\vec{u}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on voit facilement que $\sqrt{x^2+y^2}=0$ si et seulement si $x=0$, et $y=0$. Ainsi, $\|\vec{u}\|=0 \implies \vec{u}=\vec{0}$. Le seul vecteur dont la norme est nulle est le vecteur nul. Dans l'espace, cette propriété reste vraie.
3. Inégalité triangulaire : pour tous vecteurs $\vec{u},\vec{v}$, on a
$$\|\vec{u}+\vec{v}\|\leq\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\| \ .$$
Cette propriété se visualise bien dans le plan, par exemple dans la figure 1.1 (droite), où on voit bien que la longueur du vecteur somme est plus petite que la somme des longueurs.
4. Pour tous vecteur $\vec{u}$ et scalaire α, on a
$$\|\alpha\vec{u}\|=|\alpha|\,\|\vec{u}\| \ .$$
La présence de valeur absolue se justifie par le fait que la norme est toujours positive ou nulle.

Définition 1.2 (Produit scalaire) *1. Soient $\vec{u}=(x,y),\vec{v}=(x',y')\in\mathbb{R}^2$. Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ donné par*
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'\in\mathbb{R} \ .$$
2. Soient $\vec{u}=(x,y,z),\vec{v}=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$. Leur produit scalaire est le réel $\vec{u}\cdot\vec{v}$ donné par
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'\in\mathbb{R} \ .$$

On a la relation
$$\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} \ ,$$
et les propriétés importantes suivantes :

Propriétés 1.2 Le produit scalaire est bilinéaire :
1. pour tous $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^2$,
$$(\vec{u}+\vec{w})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{w}\cdot\vec{v} \ , \quad \vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w} \ .$$
2. pour tous $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$,
$$(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v}=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v}), \quad \vec{u}\cdot(\lambda\vec{w})=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v}) \ .$$

Dans les deux cas la démonstration résulte de la définition.

On a aussi la propriété importante suivante.

Théorème 1.1 (Inégalité de Cauchy-Schwartz)
$$|\vec{u}\cdot\vec{v}|\leq\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \ .$$

Preuve : On considère deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et on écrit
$$0\leq\left\|\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\pm\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right\|^2=\left\|\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right\|^2+\left\|\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right\|^2\pm2\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\cdot\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}=2\pm2\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\cdot\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \ .$$
On en déduit que
$$\pm\vec{u}\cdot\vec{v}\leq\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$$
et le tour est joué. ♠

On en déduit que le nombre $\vec{u}\cdot\vec{v}/\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$ est toujours compris entre -1 et 1, et peut donc s'écrire comme le cosinus d'un angle θ appelé angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta\ .$$

Quand $\theta = 0$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même orientation, quand $\theta = \pi$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et d'orientations opposées, et quand $\theta = \pm\pi/2$, ils sont orthogonaux.

Définition 1.3 (Repère orthonormé) *1. Un repère orthonormé de $\mathbb{R}^2$ est un couple de vecteurs $(\vec{I},\vec{J})$ orthogonaux et de norme unité :*

$$\vec{I}\cdot\vec{J} = 0\ ,\quad \text{et}\quad \|\vec{I}\| = \|\vec{J}\| = 1\ .$$

Le repère est direct si l'angle orienté $(\vec{I},\vec{J})$ vaut $\pi/2$.

2. Un repère orthonormé de $\mathbb{R}^3$ est un triplet de vecteurs $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ orthogonaux deux à deux et de norme unité :

$$\vec{I}\cdot\vec{J} = 0\ ,\quad \vec{J}\cdot\vec{K} = 0\ ,\quad \vec{K}\cdot\vec{I} = 0\ ,\quad \text{et}\quad \|\vec{I}\| = \|\vec{J}\| = 1\ .$$

Le repère est direct si les angles orientés $(\vec{I},\vec{J})$, $(\vec{J},\vec{K})$ et $(\vec{K},\vec{I})$ sont tous trois égaux à $\pi/2$.

Une propriété remarquable des repères orthonormés est la propriété suivante

Théorème 1.2 *1. Soit $(\vec{I},\vec{J})$ un repère orthonormé de $\mathbb{R}^2$. Alors tout vecteur $\vec{u}\in\mathbb{R}^2$ peut s'écrire sous la forme*

$$\vec{u} = X\vec{I} + Y\vec{J}\ ,$$

où $X, Y\in\mathbb{R}$. De plus le couple (X,Y) satisfaisant cette égalité est unique, et $\|\vec{u}\| = \sqrt{X^2+Y^2}$. Par ailleurs, les coordonnées X et Y sont obtenues en calculant

$$X = \vec{u}\cdot\vec{I}\ ,\quad Y = \vec{u}\cdot\vec{J}\ .$$

2. Soit $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ un repère orthonormé de $\mathbb{R}^3$. Alors tout vecteur $\vec{u}\in\mathbb{R}^3$ peut s'écrire sous la forme

$$\vec{u} = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}\ ,$$

où $X, Y, Z\in\mathbb{R}$. De plus le triplet (X,Y,Z) satisfaisant cette égalité est unique, et $\|\vec{u}\| = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$. Par ailleurs, les coordonnées X, Y et Z sont obtenues en calculant

$$X = \vec{u}\cdot\vec{I}\ ,\quad Y = \vec{u}\cdot\vec{J}\ ,\quad Z = \vec{u}\cdot\vec{K}\ .$$

Par conséquent, l'expression de la norme d'un vecteur en fonction de ses coordonnées ne dépend pas du choix du repère orthonormé. De la même manière, le produit scalaire de deux vecteurs est indépendant du choix du repère orthonormé.

Exemple 1.1 Soient $\vec{I} = (\sqrt{3}/2, 1/2)$ et $\vec{J} = (-1/2, \sqrt{3}/2)$. On vérifie facilement que $\|\vec{I}\|^2 = 3/4 + 1/4 = 1$, et $\|\vec{I}\|^2 = 1/4 + 3/4 = 1$, et que $\vec{I}\cdot\vec{J} = 0$, il s'agit donc d'un repère orthonormé.
Considérons le vecteur $\vec{u} = (1,2)\in\mathbb{R}^2$. Ce vecteur s'écrit donc sous la forme $\vec{u} = X\vec{I} + Y\vec{J}$. Ceci s'exprime sous la forme

$$(1,2) = X(\sqrt{3}/2, 1/2) + Y(-1/2, \sqrt{3}/2) = \left(\frac{X\sqrt{3}-Y}{2}, \frac{X+Y\sqrt{3}}{2}\right)\ ,$$

qui conduit au système

$$\left\{\begin{array}{lcccc} X\sqrt{3} & - & Y & = & 2 \\ X & + & Y\sqrt{3} & = & 4 \end{array}\right.$$

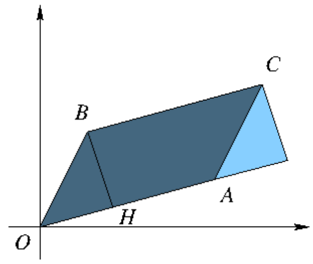

FIGURE 1.2 – Calcul de l'aire d'un parallélogramme

On peut résoudre ce système par substitution. La seconde équation permet d'écrire $X = 4 - Y\sqrt{3}$. En reportant dans la première équation, on obtient $Y = X\sqrt{3} - 2 = 4\sqrt{3} - 3Y - 2$, soit $4Y = 4\sqrt{3} - 2$ et finalement $Y = \sqrt{3Z} - 1/2$. En insérant dans l'équation donnant X, on obtient $X = 4 - Y\sqrt{3} = 1 + \sqrt{3}/2$. Pour conclure il faut vérifier que ces expressions satisfont bien le système ci-dessus, ce qui est fait directement. La solution est donc

$$(X, Y) = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3} - \frac{1}{2}\right) .$$

Notons aussi que les coordonnées X et Y s'obtiennent directement par produit scalaire, sous la forme

$$X = \vec{u} \cdot \vec{I} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} , \quad Y = \vec{u} \cdot \vec{J} = \sqrt{3} - \frac{1}{2} .$$

Définition 1.4 (Projection orthogonale) *Dans le plan, le projeté orthogonal d'un point P sur une droite (AB) est le point H de la droite tel que $\overrightarrow{PH}$ soit perpendiculaire à la droite (AB), ou ce qui est équivalent, orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.*

Par définition, le point H se trouve sur la droite (AB), et on a donc $\overrightarrow{AH} = \lambda\overrightarrow{AB}$ pour un certain réel λ. Si on note θ l'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AP}$, on a $AH = AP|\cos\theta|$ et $PH = AP|\sin\theta|$.

Exemple 1.2 (Projection orthogonale dans le plan) On considère les points $A(1, 1)$ et $B(3, 0)$ du plan, et le point $P(5, 1)$, dont on cherche le projeté orthogonal $H(x, y)$ sur la droite (AB). Le calcul donne $\overrightarrow{AB} = (2, -1)$. L'orthogonalité s'exprime sous la forme $\overrightarrow{HP} \perp \overrightarrow{AB}$, soit $\overrightarrow{HP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, qui s'écrit $2(5 - x) - (1 - y) = 0$, d'où une expression de y en fonction de x : $y = 2x - 9$.
Par ailleurs, le point H appartient à la droite (AB), ce qui peut s'exprimer comme $\overrightarrow{AH} = \alpha\overrightarrow{AB}$, pour un certain réel α. On a donc deux équations de la forme $x - 1 = 2\alpha$ et $y - 1 = -\alpha$. La seconde équation donne $\alpha = 1 - y = 8 - 2x$. On en déduit $x - 1 = 16 - 4x$, soit $x = 17/5$, et donc $y = -11/5$.

Exemple 1.3 (Application à des calculs d'aire) Dans le plan, on considère un parallélogramme $OACB$. On note H le projeté orthogonal de B sur la droite (OA), c'est à dire le point de (OA) tel que $\overrightarrow{BH}$ est perpendiculaire à (OA). On voit sur la figure 1.2 qu'il est possible de "découper" le triangle OHB et le recoller de l'autre côté du parallélogramme, sans changer l'aire de celui-ci. La figure obtenue est un rectangle, dont l'aire vaut donc

$$\mathsf{Aire}(OACB) = OA.BH .$$

On voit aussi que l'aire du triangle OAB est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme, donc

$$\mathsf{Aire}(OAB) = \frac{1}{2} OA.BH .$$

Remarque 1.1 (Le plan vu comme le plan complexe) A tout vecteur du plan $\vec{u} = (x, y)$ on associe le nombre complexe $z = x + iy$, appelé affixe de $\vec{u}$. Considérons la représentation par module et argument

$$z = x + iy = |z|e^{i\varphi} \ , \quad \text{où} \quad \varphi = \arg(z) \ .$$

Etant donnés deux vecteurs $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$, et en notant z et z' les affixes correspondantes, calculons

$$\mathfrak{Re}(z\overline{z'}) = \mathfrak{Re}((x + iy)(x' - iy')) = xx' + yy' = \vec{u}.\vec{v} \ .$$

Par ailleurs, on a aussi

$$z\overline{z'} = |z|\,|z'|\,e^{i(\varphi-\varphi')} \ , \quad \text{donc} \quad \mathfrak{Re}(z\overline{z'}) = |z|\,|z'|\,\cos(\varphi - \varphi') \ .$$

Comme $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \|\vec{u}\|$, on retrouve bien la relation

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta \ , \quad \text{où} \quad \theta = \varphi - \varphi' \ .$$

1.1.4 Déterminant, produit vectoriel, aires et volumes

Définition 1.5 (Déterminant de deux vecteurs du plan) *Soient $\vec{u} = (x, y), \vec{v} = (x', y') \in \mathbb{R}^2$. Le déterminant de ces deux vecteurs est le scalaire $\det(\vec{u}, \vec{v})$ défini par*

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y \ .$$

On peut vérifier les propriétés suivantes :

Propriétés 1.3

1. Le déterminant est anti-symétrique : $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, on a
$$\det(\vec{v}, \vec{u}) = -\det(\vec{u}, \vec{v}) \ .$$
2. Le déterminant est bi-linéaire :
   — $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$, on a
$$\det(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = \det(\vec{u}, \vec{v}) + \det(\vec{u}, \vec{w}) \ , \quad \text{et} \quad \det(\vec{u} + \vec{w}, \vec{v}) = \det(\vec{u}, \vec{v}) + \det(\vec{w}, \vec{v})$$
   — $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a
$$\det(\vec{u}, \lambda\vec{v}) = \lambda \det(\vec{u}, \vec{v}) \ , \quad \text{et} \quad \det(\lambda\vec{u}, \vec{v}) = \lambda \det(\vec{u}, \vec{v})$$
3. Deux vecteurs du plan $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.
4. Deux vecteurs du plan $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ sont orthogonaux si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \pm\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$.
5. On note $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$ l'angle orienté entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Alors
$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\theta \ .$$

Proposition 1.1 (Aire d'un parallélogramme ou d'un triangle dans le plan)

1. *On considère un parallélogramme $OACB$ défini par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Son aire vaut*
$$\mathsf{Aire}(OACB) = |\det(\vec{u}, \vec{v})| \ .$$
2. *L'aire du triangle OAB défini par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut*
$$\mathsf{Aire}(OAB) = \frac{1}{2}|\det(\vec{u}, \vec{v})| \ .$$

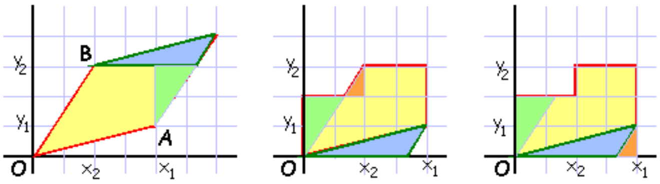

FIGURE 1.3 – Construction géométrique pour l'aire d'un parallélogramme

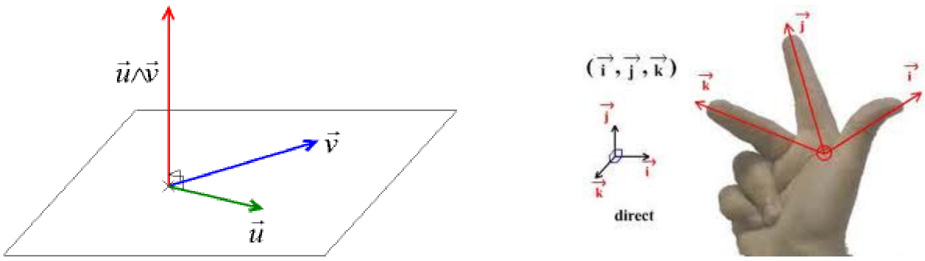

FIGURE 1.4 – Illustration du produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace. A droite, l'interprétation en termes de la règle des trois doigts de la main droite.

Preuve : D'après le résultat précédent, en notant H le projeté orthogonal de B sur la droite (OA), et par θ l'angle entre $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, on a

$$\mathsf{Aire}(OACB) = OA.BH = OA.OB|\sin(\theta)| = |\vec{u}\wedge\vec{v}| \ .$$

Le triangle étant la moitié du parallélogramme, son aire est égale à la moitié de celle du parallélogramme, ce qui conclut la preuve. ♠

Ce résultat peut aussi s'obtenir graphiquement, comme le montre la figure 1.3

Définition 1.6 (Produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace) *Soient $\vec{u} = (x, y, z)$ et $\vec{v} = (x', y', z')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Le produit vectoriel de ces deux vecteurs est le vecteur $\vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{v}$ défini par*

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = (yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx') \ .$$

Le produit vectoriel de deux vecteurs est illustré en Figure 1.4.

Propriétés 1.4

1. Le produit vectoriel est anti-symétrique : pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$,

$$\vec{v}\wedge\vec{u} = -\vec{u}\wedge\vec{v} \ .$$

2. Pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v}) = 0 \ , \quad \vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{v}) = 0 \ .$$

3. Pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, soit θ l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Alors

$$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|[\vec{v}\| \, |\sin\theta| \ .$$

4. L'orientation du produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace est donnée par la règle des trois doigts de la main droite (voir Figure 1.4, figure de droite).

Définition 1.7 (Produit mixte de trois vecteurs de l'espace) *Soient $\vec{u} = (x, y, z)$, $\vec{v} = (x', y', z')$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Le produit mixte de ces trois vecteurs est le scalaire noté $[\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}]$ et défini par*

$$[\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} \ .$$

Le produit mixte est parfois appelé <u>déterminant</u> des trois vecteurs.

Propriétés 1.5
1. Le produit mixte est linéaire par rapport à ses trois arguments
2. Il est anti-symétrique : pour tous $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$,

$$[\vec{v}; \vec{u}; \vec{w}] = -[\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}] \ , \quad [\vec{u}; \vec{w}; \vec{v}] = -[\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}] \ , \quad [\vec{w}; \vec{v}; \vec{u}] = -[\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}] \ .$$

3. Il est invariant par permutation circulaire : pour tous $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$,

$$[\vec{v}; \vec{w}; \vec{u}] = [\vec{w}; \vec{u}; \vec{v}] = [\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}] \ .$$

Proposition 1.2 (Aire d'un parallélogramme dans l'espace) *L'aire d'un parallélogramme $\mathcal{P}$ engendré par deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ est donnée par*

$$\mathsf{Aire}(\mathcal{P}) = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \ .$$

<u>Preuve :</u> Soient A, B, C et D quatre points du plan tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$. Ces points forment le parallélogramme considéré. On sait que son aire est donnée par le produit de sa base AB par sa hauteur, qui vaut $AD|\sin\alpha|$, α étant l'angle $\alpha = \widehat{BAD}$. Ceci coïncide avec l'expression de la norme du produit vectoriel. ♠

Proposition 1.3 (Volume d'un parallélépipède)
1. *On considère un parallélépipède $\mathcal{P}$ défini par trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace. Son volume vaut*

$$\mathsf{Vol}(\mathcal{P}) = |[\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}]| \ .$$

2. *Le volume du tétraèdre $\mathcal{T}$ défini par trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est donné par*

$$\mathsf{Vol}(\mathcal{T}) = \frac{1}{6} |[\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}]| \ .$$

<u>Preuve :</u>
1. On considère les points A, B, C, D tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$. $ABCD$ est un parallélépipède. On considère maintenant les points A', B', C' et D' tels que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} = \vec{w}$. Les huit points ainsi construits forment un parallélépipède. On sait que le volume du parallélépipède est égal au produit de l'aire du parallélogramme $ABCD$ (qui est égale à $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ par sa hauteur h, qui n'est autre que la longueur du projeté orthogonal de $\vec{w}$ sur l'axe perpendiculaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Ceci montre le résultat.
2. Il est possible de découper le parallélépipède en 6 tétraèdres de volumes égaux, d'où le résultat.

♠

Remarque 1.2 Lorsque le parallélépipède est défini par les longueurs a, b, et c des trois arêtes issues d'un même sommet et les angles α, β et γ qu'elles forment entre elle (voir la figure 1.5), son volume est donné par l'expression

$$V = abc\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

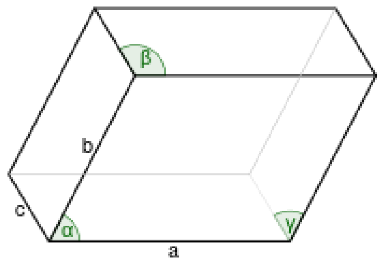

FIGURE 1.5 – Parallélépipède

1.2 Géométrie affine, droites, plans, cercles

1.2.1 Géométrie dans le plan

Droites du plan

Il existe plusieurs façons équivalentes de caractériser une droite du plan. On choisit ici de donner la définition basée sur une équation cartésienne, on verra ensuite les définitions équivalentes.

Définition 1.8 (Droite du plan) *Une droite du plan est définie par une équation cartésienne, de la forme*

$$(D) = \{M(x, y),\ \text{tel que } ax + by + c = 0\}\ ,$$

où a, b, c sont des réels quelconques.

Remarque 1.3 L'équation cartésienne n'est pas unique, il existe une infinité d'équations équivalentes. Par exemple, une autre équation cartésienne de la même droite est $2ax + 2by + 2c = 0$.

Propriétés 1.6 (Autres caractérisations)

1. Il est aussi possible de caractériser un droite du plan par un point A de la droite et un vecteur directeur $\vec{d}$:

$$(D) = \left\{M : \overrightarrow{AM} = \lambda\vec{d} \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R}\right\}\ .$$

   Là encore il existe une infinité de telles représentations : tout point de la droite peut être utilisé pour A, et tout multiple (non nul) de $\vec{d}$ est un vecteur directeur possible.
   L'équivalence entre les deux caractérisations se fait comme suit. Soit $A(x_0, y_0)$ un point de référence sur la droite, et soit $\vec{d} = (\alpha, \beta)$ un vecteur directeur. Soit $M(x, y)$ un point de la droite. L'égalité $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{d}$ s'écrit $(x - x_0, y - y_0) = \lambda(\alpha, \beta)$. Par conséquent, on a $-\beta(x - x_0) + \alpha(y - y_0) = 0$, ce qui donne l'équation cartésienne

$$-\beta x + \alpha y + (\beta x_0 - \alpha y_0) = 0\ .$$

   Inversement, étant donnée l'équation cartésienne de la droite, disons $ax + by + c = 0$, on voit facilement que le point $A(-c/a, 0)$ appartient à la droite. De plus, par identification avec le raisonnement ci-dessus, on voit facilement que $\vec{d} = (-b, a)$ est un vecteur directeur de la droite.
2. De façon équivalente, on caractérise une droite du plan par un vecteur normal $\vec{n}$ et un point A de la droite :

$$(D) = \left\{M : \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0\right\}\ .$$

   de nouveau il existe une infinité de telles représentations : tout point de la droite peut être utilisé pour A, et tout multiple (non nul) de $\vec{n}$ est un vecteur normal possible.

L'équivalence entre les deux caractérisations se fait de la façon suivante. Si $\vec{n} = (a, b)$ est un vecteur normal et si $A(x, 0, x_0)$ est un point de celle-ci, l'égalité $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}$ équivaut à $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$, soit $ax + by - (ax_0 + by_0) = 0$, ce qui est une équation cartésienne. Inversement, partant de l'équation cartésienne $ax + by + c$, on identifie immédiatement un vecteur normal $\vec{n} = (a, b)$, et n'importe quel point $M(x_0, y_0)$ de la droite fait l'affaire.

3. Enfin, on peut caractériser une droite du plan par une représentation paramétrique

$$(D) = \{M(x, y) : x = x_0 + \lambda t,\ y = y_0 + \mu t \quad \text{où} \quad t \in \mathbb{R}\} \ .$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Là encore, le choix de la paramétrisation n'est pas unique. Une équation cartésienne s'obtient en éliminant le paramètre de ces équations. Notons aussi que $\vec{d} = (\lambda, \mu)$ est un vecteur directeur de la droite.

Il est facile de passer de l'une à l'autre de ces définitions, comme on le voit sur l'exemple ci-dessous.

Exemple 1.4 Considérons la droite définie par l'équation cartésienne

$$x + y - 1 = 0 \ .$$

Il est facile de voir que le point $A(1, 0)$ appartient à la droite. Si $M(x, y)$ est un point de la droite, on voit que l'équation cartésienne équivaut à

$$\overrightarrow{AM} \cdot (1, 1) = 0 \ ,$$

de sorte que $\vec{n} = (1, 1)$ est un vecteur normal à la droite. Tout vecteur directeur $\vec{n} = (\alpha, \beta)$ de la droite est orthogonal à $\vec{d}$. Ceci s'écrit

$$\vec{d} \cdot \vec{n} = (1, 1) \cdot (\alpha, \beta) = \alpha + \beta = 0 \ ,$$

d'où $\beta = -\alpha$. Un choix possible est donc $\vec{d} = (-1, 1)$.

Etant donné un point M et une droite (D), on définit la distance entre M et (D) comme la plus petite distance entre ce M et un point quelconque MH de la droite. Il est facile de démontrer (en utilisant le théorème de Pythagore) que le point H qui minimise cette distance est le projeté orthogonal de M sur la droite. On a alors.

Proposition 1.4 (Distance d'un point à une droite) *Soit (D) une droite définie par l'équation Cartésienne $ax + by + c = 0$, et soit $M(x_0, y_0)$ un point du plan. Alors la distance de M à la droite (D) est donnée par*

$$d(M, (D)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ .$$

Cercles du plan

Définition 1.9 *Dans le plan, le cercle (C) de centre $A(x_0, y_0)$ et de rayon R est la courbe d'équation cartésienne*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \ .$$

Propriétés 1.7 (Autres caractérisations) 1. L'équation cartésienne peut s'interpréter géométriquement comme

$$(C) = \{M(x, y) : AM = R\} \ .$$

2. Génériquement, l'équation cartésienne d'un cercle est de la forme
$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \ .$$
Il est possible à partie d'une telle équation de retrouver les caractéristiques géométriques du cercle : centre et rayon :
$$A\left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}\right) \ , \qquad R = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$$
à condition que l'argument de la racine carrée soit positif.
3. Le cercle peut également être caractérisé par une équation paramétrique
$$(C) = \left\{ M(x,y) : \left\{ \begin{array}{lll} x & = x(t) & = x_0 + R\cos(t) \\ y & = y(t) & = y_0 + R\sin(t) \end{array} \right. \ , \ t \in \mathbb{R} \right\} \ .$$

1.2.2 Géométrie dans l'espace

Plan dans l'espace

Définition 1.10 (Plan de l'espace) *Un plan de l'espace est défini par une équation cartésienne*
$$(P) = \left\{ \vec{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ ax + by + cz = d \right\} \ ,$$
où a, b, c, d sont des réels.

Notons que comme précédemment, l'équation cartésienne n'est pas unique, il existe une infinité d'équations cartésiennes équivalentes caractérisant le même plan.

Propriétés 1.8 (Autres caractérisations) Un plan peut également être défini de plusieurs façons équivalentes

1. Il est possible de caractériser un plan de l'espace par un point $A \in (P)$ et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}_1, \vec{u}_2$, qui en forment ce que l'on appelle une base :
$$(P) = \left\{ M : \ \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \ .$$
Il existe une infinité de choix possibles pour A et $\vec{u}_1, \vec{u}_2$.
2. un plan peut aussi être défini par un point $A \in (P)$ et un vecteur normal $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$:
$$(P) = \left\{ M : \ \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \right\} \ .$$
Comme précédemment, cette représentation est forment liée à la représentation par équation cartésienne : si $A(x_0, y_0, z_0)$ est le point considéré, et si $\vec{n} = (a, b, c)$ est le vecteur normal, l'équation $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ s'écrit $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$, ce qui fournit directement une équation cartésienne. Par ailleurs, étant donnée une équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, les nombres a, b et c forment un vecteur normal $\vec{n} = (a, b, c)$.
Notons aussi que le vecteur normal peut être obtenu à partir de la base de vecteurs du plan $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ par un simple produit vectoriel : $\vec{n} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$.
3. Le plan peut finalement aussi être défini par une paramétrisation
$$(P) = \left\{ M(x,y,z) : \left\{ \begin{array}{lll} x & = x(t,s) & = \alpha_1 t + \beta_1 s + \gamma_1 \\ y & = y(t,s) & = \alpha_2 t + \beta_2 s + \gamma_2 \\ z & = z(t,s) & = \alpha_3 t + \beta_3 s + \gamma_3 \end{array} \right. \ , \qquad t, s \in \mathbb{R} \right\} \ ,$$

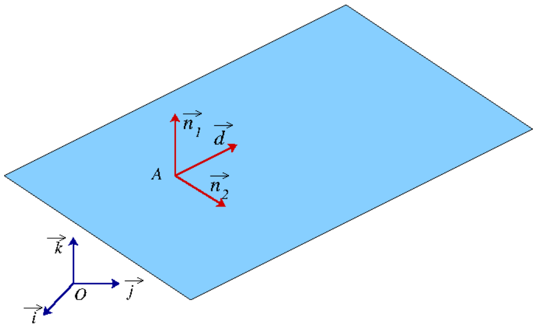

FIGURE 1.6 – Plan affine : deux vecteurs du plan non colinéaires, et un vecteur normal.

où les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \gamma_3$ sont des réels. On peut vérifier que $\vec{n}_1 = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et $\vec{n}_2 = \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ forment une base du plan pouvant être utilisée pour le caractériser, avec le point $A(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$.

Exemple 1.5 (Plan affine) On considère le plan d'équation Cartésienne $x - 2y + z = 1$.

— On voit facilement que $A(1,0,0) \in (P)$. L'équation Cartésienne s'écrit sous la forme $(x-1) + y + z = \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, où $\vec{n} = (1,-2,1)$ est un vecteur normal au plan.

— Avec le point A obtenu ci-dessus, on a donc

$$\overrightarrow{AM} = (x-1, y, z) = (x-1, y, 1-x+2y) = (x-1).(1,0,-1) + y.(0,1,2) \ ,$$

et $\overrightarrow{AM}$ s'écrit donc comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{d}_1 = (1,0,-1)$ et $\vec{d}_2 = (0,1,2)$. On vérifie aussi que $\vec{d}_1 \wedge \vec{d}_2 = (1,-2,1) = \vec{n}$.

Droite dans l'espace

Définition 1.11 (Droite de l'espace) *Une droite de l'espace est définie par deux équations cartésiennes*

$$(D) = \left\{ M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \begin{array}{rcl} ax + by + cz & = & d \\ a'x + b'y + c'z & = & d' \end{array} \right\}$$

où $a, a', b, b', c, c', d, d'$ sont des réels.

Propriétés 1.9 (Autres caractérisations) 1. Définie par un point $A \in (D)$ et un vecteur directeur $\vec{d} \in \mathbb{R}^3$

$$(D) = \left\{ M : \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{d}, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\} \ . \tag{1.1}$$

2. Définie par un point $A \in (D)$ et deux vecteur normaux non colinéaires $\vec{n}_1, \vec{n}_2 \in \mathbb{R}^3$

$$(D) = \left\{ M : \quad \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}_1 = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}_2 = 0 \right\} \ . \tag{1.2}$$

Notons au passage que les deux équations $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}_1 = 0$ et $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}_2 = 0$ fournissent directement deux équations Cartésiennes ; par exemple, si A est un point de coordonnées $A(u,v,w)$ et si $\vec{n}_1 = (a,b,c)$, l'équation $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}_1 = 0$ équivaut à $a(x-u) + b(y-v) + c(z-w) = 0$, soit $ax + by + cz = au + bv + cw := d$. Similairement l'autre vecteur normal fournit une autre équation Cartésienne.

Notons aussi que le produit vectoriel $\vec{d} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$ fournit directement un vecteur directeur de la droite.

3. La droite peut finalement aussi être définie par une paramétrisation

$$(P) = \left\{ M(x,y,z) : \left\{ \begin{array}{lll} x & = x(t) & = \alpha_1 t + \beta_1 \\ y & = y(t) & = \alpha_2 t + \beta_2 \\ z & = z(t) & = \alpha_3 t + \beta_3 \end{array} \right. , \ t \in \mathbb{R} \right\} ,$$

où les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \gamma_3$ sont des réels. On peut vérifier que $\vec{d_1} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est un vecteur directeur de la droite, pouvant être utilisé pour la caractériser, avec le point $A(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$.

Distances dans l'espace

La distance entre deux points de l'espace est bien connue. La distance entre un point M et une droite (ou un plan) est définie comme la distance entre M et le point le plus proche de la droite (ou du plan), c'est à dire son projeté orthogonal sur la droite (ou le plan), voir Figure 1.7.

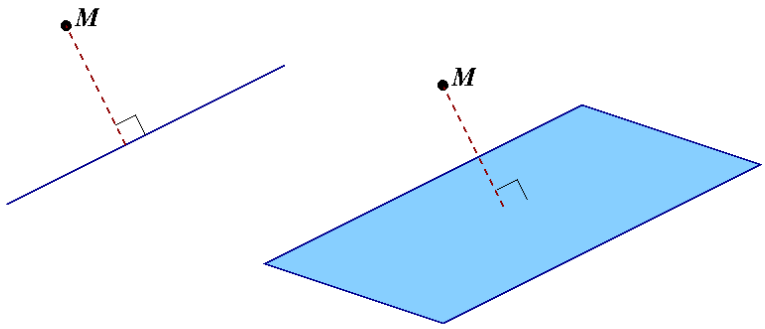

Figure 1.7 – Distance d'un point à une droite dans le plan (gauche), et d'un point à un plan dans l'espace (droite).

Proposition 1.5 (Distances dans l'espace) *1. Etant donnés deux points $M(x,y,z)$ et $M'(x',y',z')$, la distance entre < M et M' vaut*

$$d(M,M') = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} .$$

2. La distance entre un point M et une droite définie par un vecteur directeur $\vec{d}$ et un point M_0 est donnée par

$$d(M,(D)) = \frac{\left\| \vec{d} \wedge \overrightarrow{MM_0} \right\|}{\|\vec{v}\|}$$

3. La distance d'un point $M(x_0,y_0,z_0)$ à un plan (P) d'équation $ax+by+cz+d=0$ est donnée par

$$d(M,(P)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} .$$

1.3 Transformations du plan

Une transformation du plan est une application bijective du plan : chaque point a un unique antécédent. On notera Id l'application identité.

1.3.1 Définitions : translation, réflexion, rotation, homothétie, similitude

Définition 1.12 (Translation) *Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. La translation de vecteur $\vec{u}$ est la transformation associant à tout point A du plan le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. On note $t_{\vec{u}}$ la translation de* *vecteur $\vec{u}$.*

En notant $\vec{u}=(a,b)$ la translation associe donc à tout $M(x,y)$ le point $M'(x',y')$ défini par

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & x+a \\ y' & = & y+b \end{array}\right. .$$

Propriétés 1.10 1. L'identité est la translation de vecteur nul $t_{\vec{0}}$, la composée de deux translations $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ est la translation $t_{\vec{u}+\vec{v}}$ de vecteur $\vec{u}+\vec{v}$, l'inverse d'une translation $t_{\vec{u}}$ est la translation $t_{-\vec{u}}$ de vecteur $-\vec{u}$.

2. La composition des translations est commutative : étant donnés deux vecteurs $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^2$, $t_{\vec{u}}\circ t_{\vec{v}}=t_{\vec{u}+\vec{v}}=t_{\vec{v}}\circ t_{\vec{u}}$.

Définition 1.13 (Réflexion, ou symétrie axiale) *Soit (Δ) une droite du plan. La réflexion d'axe (Δ), ou symétrie axiale d'axe (Δ) est la transformation $s_{(\Delta)}$ qui à tout point A du plan associe le point B tel que (Δ) soit la médiatrice du segment $[AB]$. On l'appelle également symétrie axiale par rapport à (Δ).*

Soit $M(x,y)$, soit $M'(x',y')$ son image par la symétrie d'axe (Δ). Si on note $I(x_0,y_0)\in(\Delta)$ le milieu de $[MM']$, on a alors $MM'=2MI$, soit

$$x'=2x_0-x\ ,\quad y'=2y_0-y\ .$$

Notons que I est le projeté orthogonal de M sur (Δ). Il faut aussi noter que x_0 et y_0 dépendent de M.

Exemple 1.6 Soit $\{\vec{\imath},\vec{\jmath}\}$ un repère orthonormé du plan, et soit O l'origine.

— La symétrie d'axe $O\vec{\jmath}$ associe à tout point $M(x,y)$ le point $M'(x',y')$ tel que la médiatrice de $[MM']$ soit l'axe $O\vec{\jmath}$. On a donc
$$s_{(O\vec{\jmath})}(M)=M(-x,y)\ .$$

— La symétrie d'axe $(O\vec{\imath})$ associe à tout point $M(x,y)$ le point $M'(x',y')$ tel que la médiatrice de $[MM']$ soit l'axe $O\vec{\imath}$. On a donc
$$s_{(O\vec{\imath})}(M)=M(x,-y)\ .$$

— Considérons la droite (D) d'équation cartésienne $2x+y-3=0$. Un vecteur normal de (D) est le vecteur $\vec{n}=(2,1)$, et un vecteur directeur est $\vec{d}=(1,-2)$. Considérons un point $M_0(x,y)$ du plan, soit M' son image par symétrie par rapport à (D). Soit $I(x_0,y_0)$ le projeté orthogonal de M sur (D). On a donc $2x_0+y_0-3=0$, et $\overrightarrow{IM}\perp\vec{d}$ donne $x-x_0-2(y-y_0)=0$. La première équation donne $y_0=3-2x_0$, et en insérant dans la première on obtient $x-x_0-2(y-3+2x_0)=0$, soit $x_0=(x-2y+6)/5$, et en reportant dans l'autre équation on obtient $y_0=(-2x+4y+9)/5$. De là on peut déduire (x',y').

Propriétés 1.11 1. La symétrie axiale est une **involution** : $s_{(\Delta)}\circ s_{(\Delta)}=\mathsf{Id}$, il en résulte qu'une symétrie axiale est sa propre inverse : $s_{(\Delta)}^{-1}=s_{(\Delta)}$.

2. Il est possible de démontrer (voir TD) que la composée $s_1\circ s_2$ de deux symétries axiales s_1 et s_2 d'axes respectifs (D_1) et (D_2), est soit une translation soit une rotation
   — Si (D_1) et (D_2) sont parallèles, soit $\vec{u}$ un vecteur normal à (D_1), de norme $\|\vec{u}\|=2d((D_1),(D_2))$ égale au double de la distance entre (D_1) et (D_2) et orienté de (D_2) vers (D_1). Alors $s_1\circ s_2=t_{\vec{u}}$.
   — Si (D_1) et (D_2) sont sécantes, soit O leur intersection. Alors $s_1\circ s_2$ est la rotation de centre O et d'angle $((D_1),(D_2))$.

Définition 1.14 (Rotation) *Soient A un point du plan et θ un réel. La rotation de centre A et d'angle θ est la transformation r_θ^A (que l'on peut aussi noter r_θ s'il n'y a pas d'ambigüité sur le centre) qui à tout point B du plan associe le point C du cercle de centre A et de rayon AB tel que $\widehat{BAC} = \theta$.*

Soit $A(a, b)$ le centre de la rotation, et soit θ son angle. Soit $M(x, y)$ un point du plan, et soit $M'(x', y') = r_\theta^A(M)$ son image par la rotation. Le calcul montre que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & a + (x-a)\cos\theta + (y-b)\sin\theta \\ y' & = & b + (x-a)\sin\theta + (y-b)\cos\theta \ . \end{array} \right.$$

Cette expression est facile à obtenir à partir de la représentation complexe du plan et des transformations du plan.

Propriétés 1.12
1. L'identité Id est la rotation d'angle nul (quel que soit le centre), la composée de deux rotations r_α^A et r_β^A de même centre A est la rotation d'angle $\alpha + \beta$ de même centre. L'inverse d'une rotation de centre A et angle α est la rotation de centre A et d'angle $-\alpha$.
2. La composition de deux rotations de même centre est commutative : pour tous réels α, β et tout point A du plan, $r_\alpha^A \circ r_\beta^A = r_{\alpha+\beta}^A = r_\beta^A \circ r_\alpha^A$.
3. Plus généralement, il est possible de montrer que la composée de deux rotations est soit une rotation soit une translation.

Définition 1.15 (Homothétie) *Soient A un point du plan et λ un réel non nul. L'homothétie de centre A et de facteur λ est la transformation h_λ^A (que l'on peut aussi noter h_θ s'il n'y a pas d'ambigüité sur le centre) qui à tout point B du plan associe le point C tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$.*

Si $A(a, b)$ est le centre de l'homothétie, alors en notant $M(x, y)$ et $M'(x', y') = h_\lambda^A(M)$, on a $(x' - a) = \lambda(x - a)$ et $(y' - b) = \lambda(y - b)$, soit donc

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & a + \lambda(x-a) \\ y' & = & b + \lambda(y-b) \end{array} \right.$$

Propriétés 1.13
1. L'identité Id est l'homothétie de rapport 1 (quel que soit le centre), la composée de deux homothéties h_λ^A et h_μ^A de même centre A est l'homothétie de rapport $\lambda\mu$ de même centre. L'inverse d'une homothétie de centre A et rapport λ est l'homothétie de centre A et de rapport $1/\lambda$.
2. La composition de deux homothéties de même centre est commutative : pour tous réels λ, μ et tout point A du plan, $h_\lambda^A \circ h_\mu^A = h_{\lambda\mu}^A = h_\mu^A \circ h_\lambda^A$.

On définit généralement les similitudes du plan comme les transformations qui préservent les angles et les rapports de distances (en d'autres termes, qui multiplient toutes les distances par une constante positive fixe k appelée rapport de similitude). L'image d'une figure par une similitude est une figure semblable, c'est-à-dire intuitivement "de même forme". Les similitudes directes préservent l'orientation, les similitudes inverses inversent l'orientation.

Définition 1.16 (Similitude directe) *Soient A un point du plan, θ un réel et λ un réel non nul. La similitude directe de centre A, d'angle θ et de rapport λ est la composée commutative $\mathsf{sim}_{\theta,\lambda}^A = h_\lambda^A \circ r_\theta^A = r_\theta^A \circ h_\lambda^A$.*

Propriétés 1.14
1. Cette définition fait sens car on peut bien vérifier que la composition d'une rotation et d'une homothétie de même centre commutent. On pourra le vérifier directement en représentant ces transformations dans le plan complexe.

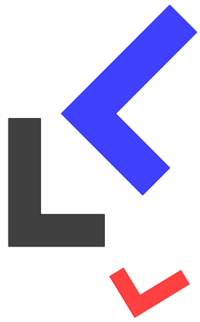

FIGURE 1.8 – Gauche : les formes de même couleur sont semblables ; droite : Le L bleu est l'image du L noir par une similitude directe de rapport plus grand que 1 (agrandissement), le L inversé rouge est l'image du L noir par une similitude indirecte de rapport plus petit que 1 (réduction). Figures tirées de l'encyclopédie en ligne Wikipedia

.

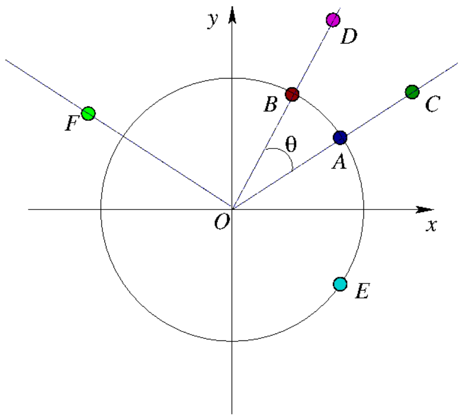

FIGURE 1.9 – Transformations du plan : le point original est A, B est obtenu par rotation d'angle θ, C est obtenu par homothétie de rapport $\lambda \approx 1.8$, D est obtenu par similitude directe (composition des deux transformations précédentes), F par symétrie d'axe Oy et F par similitude indirecte (composition de symétrie par rapport à l'axe Ox et homothétie de rapport $\lambda' \approx 1.3$.

2. La composition de deux similitudes directes de même centre est une similitude directe de même centre, et de rapport égal au produit des deux rapports. Par conséquent, la composition des similitudes est commmutative.
3. Une similitude directe de rapport 1 est appelée **déplacement**.

Définition 1.17 (similitude indirecte) *Soient A un point du plan, (Δ) une droite passant par A et λ un réel non nul. La similitude indirecte de centre A, d'axe (Δ) et de rapport λ est la composée commutative* $\mathsf{sim}_{(\Delta),\lambda} = h_\lambda^A \circ s_{(\Delta)} = s_{(\Delta)} \circ h_\lambda^A$.

Remarque 1.4 La composition de deux similitudes indirectes ne produit pas une similitude indirecte en général, même si ces deux similitudes ont même centre.

Théorème 1.3 (Propriétés principales) *1. Toutes les transformations ci-dessus préservent les angles non-orientés ; en particulier elles conservent l'alignement (on dit que ce sont des transformations affines).*

2. Les translation et rotations sont des **isométries** *: elles conservent les distances.*

3. *Les similitudes (directes ou indirectes) sont des* **quasi-isométries** *: elles multiplient toutes les distances par un même scalaire (la valeur absolue de leur rapport).*
4. *Les translations et les similitudes directes sont des* **transformations directes** *: elles préservent l'orientation (c'est à dire les angles orientés).*
5. *Les similitudes indirectes inversent l'orientation.*

1.3.2 Interprétation dans le plan complexe

On a vu plus haut que le plan Euclidien peut être mis en correspondance bijective avec le plan complexe : si $M(a,b)$ est un point du plan, on note $z = a + ib \in \mathbb{C}$ le nombre complexe correspondant, appelé affixe de M. De la même façon, les transformations du plan peuvent être représentées par des fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. On en donne quelques exemples ci-dessous

1. Translations : soit $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, et soit $t_{\vec{u}}$ la translation associée. Dans le plan complexe, la translation est représentée par la fonction

$$f : z = a + ib \to f(z) = z + z_{\vec{u}} \ , \quad \text{où} \quad z_{\vec{u}} = x + iy \ .$$

2. Rotations : Soit $\theta \in [0, 2\pi[$; la rotation r_θ de centre O et d'angle θ est représentée par la fonction

$$f : z = a + ib \to f(z) = e^{i\theta}.z \ .$$

plus généralement, la rotation d'angle θ et de centre C est associée à la fonction

$$f : z = a + ib \in \mathbb{C} \to f(z) = z_C + e^{i\theta}.(z - z_C) \ ,$$

où z_C est l'affixe du point C du plan.

3. Homothéties : Soient C un point du plan et λ un réel positif ; l'homothétie h_λ^C de centre C et de rapport λ est représentée par la fonction

$$f : z = a + ib \to f(z) = z_C + \lambda.(z - z_C) \ ,$$

où z_C est l'affixe du point C du plan.

4. Réflexions particulières : La réflexion par rapport à l'axe $(O, \vec{\imath})$ est représentée par la fonction

$$f : z = a + ib \to f(z) = \overline{z} \ ,$$

et la réflexion par rapport à l'axe $(O, \vec{\jmath})$ est représentée par la fonction

$$g : z = a + ib \to g(z) = -\overline{z} \ .$$

Chapitre

2 Nombres complexes

2.1 Définitions, propriétés

2.1.1 Définitions

Un nombre complexe est un nombre de la forme

$$z = a + ib \ , \quad a, b \in \mathbb{R} \ ,$$

où

$$i^2 = -1 \ .$$

On appelle a la partie réelle de z, notée $a = \mathfrak{Re}(z)$ et b la partie imaginaire de z, notée $b = \mathfrak{Im}(z)$. Lorsque $b = 0$ alors $z = a \in \mathbb{R}$, par conséquent $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Les nombres complexes dont la partie réelle est nulle s'appellent des nombres imaginaires purs.
Au même titre que les réels, les nombres complexes peuvent être additionnés. On écrit ainsi

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b') \ ,$$

et en tenant compte du fait que $i^2 = -1$,

$$(a + ib).(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba') \ .$$

Propriétés 2.1
1. Commutativité de l'addition : $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, on a $z + z' = z' + z$.
2. Associativité de l'addition : $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}$, on a $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$.
3. Elément neutre pour l'addition : 0 est élément neutre pour l'addition : $\forall z \in \mathbb{C}$, $0 + z = z + 0 = z$.
4. Opposé d'un complexe : $\forall z = a + ib \in \mathbb{C}$, $-z = -a - ib$ est l'opposé de z : $z + (-z) = 0$.
5. Commutativité de la multiplication : $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, on a $z.z' = z'.z$.
6. Associativité de la multiplication : $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}$, on a $(z.z').z'' = z.(z'.z'')$.
7. Elément neutre pour la multiplication : 1 est élément neutre pour la multiplication : $\forall z \in \mathbb{C}$, $1.z = z.1 = z$.
8. Inverse d'un complexe : $\forall z = a + ib \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, il existe un complexe noté z^{-1} tel que $z.z^{-1} = z^{-1}.z = 1$. Le calcul montre que $z^{-1} = (a - ib)/(a^2 + b^2)$.

Définition 2.1 *On peut associer à tout complexe $z = a + ib \in \mathbb{C}$ le point $M(a, b)$ du plan. On dit que z est l'affixe du point M. Cette correspondance est bijective, et est illustrée dans la Figure 2.1.*

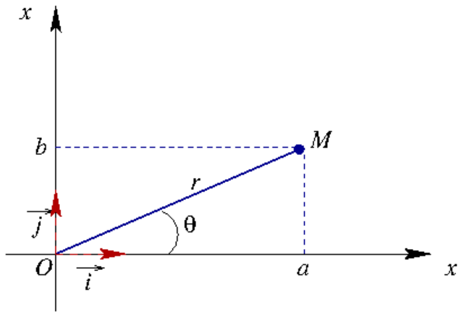

FIGURE 2.1 – Correspondance entre l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes et le plan : le point $M(a,b)$ est associé au nombre complexe $z = a + ib$. z est l'affixe de M.

2.1.2 Conjugué, module

Définition 2.2 *Soit $z = \mathfrak{Re}(z) - i\,\mathfrak{Im}(z) \in \mathbb{C}$. Son conjugué est le nombre complexe $\overline{z}$ défini par*

$$\overline{z} = \mathfrak{Re}(z) - i\,\mathfrak{Im}(z)\ , \quad z \in \mathbb{C}\ .$$

Le module de z le réel positif ou nul défini par

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}\ , \qquad z \in \mathbb{C}\ .$$

Notons que si a, b sont réels,

$$\overline{a+ib} = a - ib\ , \qquad |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}\ .$$

Propriétés 2.2 Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a

1. $\overline{\overline{z}} = z$.
2. $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
3. $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$.
4. $z = 0$ si et seulement si $|z| = 0$.
5. $\mathfrak{Re}(z) = (z+\overline{z})/2$, et $\mathfrak{Im}(z) = (z-\overline{z})/2i$.
6. $|z.z'| = |z|.|z'|$.
7. $|z+z'| \leq |z| + |z'|$.
8. $z.z' = 0$ si et seulement si $z = 0$ ou $z' = 0$.

2.1.3 Représentation géométrique d'un nombre complexe

Comme on l'a vu, on associe à tout complexe $z = a + ib \in \mathbb{C}$ (où $a, b \in \mathbb{R}$) le point $M(a,b)$ du plan. on a alors la correspondance entre le module de z et la distance de M à l'origine (voir Figure 2.1) :

$$OM = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{a^2+b^2} = [z|\ .$$

Définition 2.3 *Soit $z \in \mathbb{C}$, soir M le point du plan d'affixe z. L'argument de z, noté* $\arg(z)$, *est l'angle (orienté) formé par $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe Ox :*

$$\arg(z) = (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})\ .$$

Théorème 2.1 *Soit $z \in \mathbb{C}$. Il existe un unique $r \in \mathbb{R}_+$ et un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que*

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) .$$

<u>Preuve :</u> Soit $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, et soit $M(a, b)$ le point du plan d'affixe z. On a donc $r = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$, et soit θ l'angle $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$. On a bien $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$, et θ est unique si on limite le choix à un intervalle de longueur 2π (come par exemple $[0, 2\pi[$ ou $[-\pi, \pi[$). ♠
Ainsi r n'est autre que le module de z, et on note le complexe z sous la forme

$$z = re^{i\theta} = |z|\, e^{i\arg(z)} ,$$

cette forme est appelée **écriture polaire** de z, par opposition à l'écriture algébrique $z = a + ib$.

Remarque 2.1 On a fait le choix ici de limiter l'argument à prendre ses valeurs entre 0 et 2π, c'est ce que l'on appelle choisir une *détermination* pour l'argument. On aurait aussi pu choisir $\theta \in [-\pi, \pi[$, ou tout autre intervalle de longueur 2π.
On utilisera l'opération *modulo* : l'expression $\theta[\mathsf{mod}\, 2\pi]$ produit un angle égal à $\theta - 2\pi k$, où k est l'entier tel que $\theta - 2\pi k \in [0, 2\pi[$. Un tel entier k est unique.

Exemple 2.1 Soit $z = 1 - i\sqrt{3}$. On voit facilement que $|z| = \sqrt{1+3} = 2$. Par ailleurs, on a $\mathfrak{Re}(z) = 1 = |z|/2$ et $\mathfrak{Im}(z) = -\sqrt{3} = -|z|\sqrt{3}/2$. Par identification, θ est l'unique angle compris entre 0 et 2π tel que $\cos\theta = 1/2$ et $\sin\theta = -\sqrt{3}2$, à savoir $\theta = 5\pi/3$. On a donc $z = 2e^{5i\pi/3}$.

Théorème 2.2 *Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors*

$$|z.z'| = |z|.|z'| , \quad \textit{et} \quad \arg(z.z') = (\arg(z) + \arg(z'))\ [\mathsf{mod} 2\pi] .$$

<u>Preuve :</u> La première assertion a déjà été démontrée, mais peut se retrouver en utilisant l'écriture polaire. Soient $z = re^{i\theta}$ et $z = r'e^{i\theta'}$. On a alors $zz = rr'e^{i(\theta+\theta')}$, le module de zz' vaut donc $|z.z'| = r.r' = |z|.|z'|$, et l'argument de $z.z'$ vaut $(\theta + \theta')\,[\mathsf{mod}\, 2\pi]$. ♠
Dans le même ordre d'idées, si $z, z' \in \mathbb{C}$ avec $z' \neq 0$, alors

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} , \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = (\arg(z) - \arg(z'))\ [\mathsf{mod} 2\pi] .$$

Exemple 2.2 Soient $z = 1 + i$ et $z' = \sqrt{3} - i$. Calculons

$$\frac{z}{z'} = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{3+1} = \frac{(\sqrt{3}-1) + i(\sqrt{3}+1)}{4} = \frac{\sqrt{3}-1}{4} + i\frac{\sqrt{3}+1}{4} .$$

Par ailleurs, on peut calculer aussi

$$|z| = \sqrt{2} , \quad |z'| = \sqrt{10} , \quad \text{d'où} \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}} ,$$

et

$$\arg(z) = \frac{\pi}{4} , \quad \arg(z') = \frac{11\pi}{6} , \quad \text{d'où} \quad \arg(z/z') = \frac{5\pi}{12} .$$

Remarque 2.2
1. Soit $\theta \in [0, 2\pi]$. Alors pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$), en notant $z' = a' + ib' = e^{i\theta}z$, on a

$$a' = a\cos\theta - b\sin\theta , \qquad b' = a\sin\theta + b\cos\theta .$$

   Ainsi, le point M d'affixe z est transformé en le point M' d'affixe z', et par identification on reconnaît là l'expression d'une rotation de centre O et d'angle θ.

2. Dans le même ordre d'idée, soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. On considère la transformation associant à tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) le complexe $z' = a' + ib' = \lambda z$. On a alors
$$a' = \lambda a \ , \qquad b' = \lambda b \ ,$$
et on reconnaît l'action de l'homothétie de centre O et de rapport λ.
3. En composant les deux, on voit que la transformation $z \in \mathbb{C} \to z' = \gamma z$, où $\gamma \in \mathbb{C}$ n'est autre que la simitude de centre O, de rapport $|\gamma|$ et d'angle $\arg(\gamma)$.
4. On verra plus loin d'autres exemples de transformation du plan.

2.1.4 Formule de Moivre, formule d'Euler

Les deux formules qui suivent sont d'une grande importance pratique, car elles permettent de simplifier des calculs compliqués.

Théorème 2.3 (Formule de Moivre)

$$(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n \ .$$

Preuve : Il suffit d'utiliser l'expression polaire :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \ ,$$

ce qui est le résultat recherché. ♠

Cette formule est utilisée pour rechercher les puissances n-ièmes de nombres complexes sous forme trigonométrique :
$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\,)$$
ainsi que pour obtenir les formes de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$ (et inversement)

Exemple 2.3 Par exemple, pour avoir $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$, on écrit :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$$

On a :
$$\cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta) \ .$$
En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient les deux égalités suivantes :

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta \ , \qquad \sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta \ .$$

On obtient de façon similaire des expressions pour $\cos(n\theta)$ pour tout entier n.

Rappel : (formule du binôme de Newton) On rappelle le résultat important suivant (voir Section 2.4 pour plus de détails) : pour tout entier positif n, et pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \ , \quad \text{où} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \ .$$

Exemple 2.4 (Polynômes de Chebyshev) La formule de Moivre donne :

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{p=0}^{n} i^p \binom{n}{p} \cos^{n-p}\theta \sin^p\theta \ .$$

En prenant la partie réelle et en posant $p = 2k$, il vient :

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)$$

où T_n est un polynôme de degré n, appelé polynôme de Chebyshev.

$$T_n(X) = \sum_{0\leq 2k\leq n} \binom{n}{2k}(-1)^k X^{n-2k}(1-X^2)^k$$

Théorème 2.4 (Formule d'Euler)

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \ , \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \ .$$

Preuve : Là encore il suffit de faire le calcul. Par exemple, pour la première des deux égalités,

$$e^{i\theta}+e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta + \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = 2\cos\theta \ ,$$

d'après la parité du cosinus et l'imparité du sinus. Ceci conduit au résultat. La seconde se montre de façon identique. ♠

On peut voir ce dernier résultat de façon plus géométrique : $e^{i\theta}$ se trouve sur le cercle trigonométrique. $e^{-i\theta}$ est son symétrique par rapport à l'axe réel, la somme des deux est donc réelle, et égale à deux fois la partie réelle de $e^{i\theta}$, donc $2\cos\theta$. Le même raisonnement s'applique pour le sinus.

Exemple 2.5 (Linéarisation) Calculons

$$\cos^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{e^{3i\theta}+e^{i\theta}+e^{-i\theta}+e^{-3i\theta}}{8} = \frac{1}{4}\left[\cos(3\theta)+\cos(\theta)\right] \ .$$

Ceci permet de simplifier certains calculs, par exemple d'obtenir une primitive de $\cos^3\theta$, à savoir

$$\int \cos^3\theta \, d\theta = \frac{1}{4}\int \left[\cos(3\theta)+\cos(\theta)\right] \, d\theta = \frac{1}{12}\left[\sin(3\theta)+3\sin(\theta)\right] \ .$$

2.1.5 Complexes et géométrie du plan

Considérons le plan, muni d'un repère orthonormé $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et d'une origine O.
On a vu que l'équation cartésienne d'une droite du plan est une équation de la forme

$$ax + by + c = 0 \ ,$$

où a, b et c sont des réels.
Notons $z = x + iy$ l'affixe du point $M(x, y)$ du plan. On a vu que $z + \overline{z} = 2x$ et $z - \overline{z} = 2iy$. L'équation s'écrit donc

$$a(z+\overline{z}) - ib(z-\overline{z}) + c/2 = 0 \ .$$

En posant $\omega = a + ib \in \mathbb{C}$, et $k = c/2 \in \mathbb{R}$, on a donc montré

Théorème 2.5 (Equation d'une droite) *Une équation cartésienne d'une droite dans le plan complexe est de la forme*

$$\overline{\omega}.z + \omega.\overline{z} + k = 0 \ ,$$

où $\omega \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{R}$.

Remarque 2.3 Notons que $\omega = a + ib$ est l'affixe du point N du plan tel que $\overrightarrow{ON} = \vec{n} = (a, b)$, vecteur normal à la droite.

Exemple 2.6 On considère la droite d'équation $2x + 3y + 4 = 0$. Son équation complexe est de la forme $(2 + 3i)\overline{z} + (2 - 3i)z + 2 = 0$.

Dans le même ordre d'idées, considérons le cercle de centre $\Omega(\alpha, \beta)$ et de rayon R. Un point $M(x, y)$ appartient au cercle si et seulement si $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$, ce qui équivaut à

$$|z - \omega|^2 = R^2 \ ,$$

où $z = x + iy$ est l'affixe de M et $\omega = \alpha + i\beta$ est l'affixe de Ω. En développant, on obtient

Théorème 2.6 *L'équation cartésienne d'un cercle de rayon R dans le plan complexe est de la forme*

$$|z|^2 - z\overline{\omega} - \overline{z}\omega + (|\omega|^2 - R^2) = 0 \ ,$$

où $R \in \mathbb{R}_+$ est le rayon du cercle, et $\omega \in \mathbb{C}$ est l'affixe du centre du cercle.

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Théorème 2.7 *Soit A, B deux points du plan et $k \in \mathbb{R}^+$. L'ensemble des points M tel que*

$$\frac{MA}{MB} = k$$

est
- *une droite qui est la médiatrice de $[AB]$, si $k = 1$,*
- *un cercle, sinon.*

2.2 Racines complexes

2.2.1 Racines d'un nombre complexe

Définition 2.4
1. *Une racine carrée (complexe) d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ est un nombre complexe w vérifiant $w^2 = z$. Tout nombre complexe a exactement deux racines carrées (complexes) opposées, distinctes, excepté 0, dont 0 est la seule racine carrée. Par exemple, les deux racines carrées (complexes) de -1 sont i et $-i$.*
2. *Plus généralement, une racine n-ième de z est un nombre complexe w vérifiant $w^n = z$. Hormis 0, tout nombre complexe admet exactement n racines n-ièmes distinctes.*

Pour calculer la racine n-ième d'un nombre complexe z, le plus simple est d'exprimer z sous forme polaire :

$$z = re^{i\theta} \ , \quad r = |z|, \ \theta = \arg(z) \in [0, 2\pi[\ .$$

Cherchons maintenant $\omega \in \mathbb{C}$, racine n-ième de z, donc tel que $\omega^n = z$. En mettant ω sous forme polaire

$$\omega = \rho e^{i\alpha} \ ,$$

l'égalité $\omega^n = z$ conduit à

$$\rho^n = r \ , \qquad n\alpha = \theta \ [\text{mod } 2\pi] \ .$$

Exemple 2.7 Cherchons les racines troisièmes de 1. On écrit donc $1 = e^{0 \times i}$, les racines sont de la forme $e^{i\theta}$, avec $\theta = 2k\pi/3$, $k = 0, \ldots 2$. Les racines troisièmes sont donc

$$e^0 = 1 \ , \qquad j = e^{2i\pi/3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \ , \qquad j^2 = e^{4i\pi/3} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \ .$$

On peut par ailleurs noter que $1 + j + j^2 = 0$.

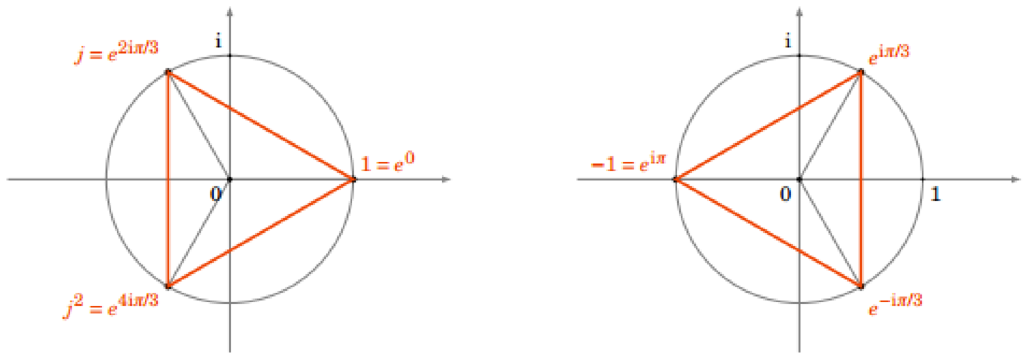

FIGURE 2.2 – Représentation graphique des racines troisièmes de 1 et -1.

Exemple 2.8 Dans le même ordre d'idées, les racines N-ièmes de l'unité sont les N nombres complexes de module égal à 1 et d'argument $2n\pi/N$, $n = 0, \dots N-1$

$$\xi_n = e^{2in\pi/N} \ , \quad n = 0, \dots N-1 \ .$$

Propriétés 2.3

1. On rappelle l'expression de la somme d'une série géométrique finie de raison $\omega \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{n=0}^{N} \omega^n = \begin{cases} \dfrac{1-\omega^{N+1}}{1-\omega} & \text{si } \omega \neq 1 \\ N+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. On rappelle aussi qu'à la limite $N \to \infty$, cette série est convergente si $|\omega| < 1$.
3. Soit maintenant ω une racine N-ième de $z \in \mathbb{C}$, telle que $\omega \neq 1$, et calculons

$$\sum_{n=0}^{N-1} \omega^n = \frac{1-\omega^N}{1-\omega} = \frac{1-z}{1-\omega}$$

Donc, dans le cas particulier où $z = 1$, on voit que cette somme est nulle : la somme des puissances entières d'une racine de l'unité différente de 1 est nulle.
Dans le cas particulier $N = 3$, on retrouve ainsi l'égalité $1 + j + j^2 = 0$.

2.2.2 Racines complexes d'équations du second degré

Une équation du second degré, ou équation quadratique, est une équation polynomiale de degré 2, c'est-à-dire qu'elle peut s'écrire sous la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0 \ , \tag{2.1}$$

où x est l'inconnue et les lettres a, b et c représentent les coefficients, avec $a \neq 0$.
On sait que dans l'ensemble des nombres réels, une telle équation admet au maximum deux solutions, qui correspondent aux abscisses des éventuels points d'intersection de la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ avec l'axe des abscisses dans le plan muni d'un repère cartésien. La position de cette parabole par rapport à l'axe des abscisses, et donc le nombre de solutions (0, 1 ou 2) est donnée par le signe du discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac \ . \tag{2.2}$$

Ce dernier permet également d'exprimer facilement les solutions, qui sont aussi les racines de la fonction du second degré associée. Une interprétation graphique se trouve sur la figure 2.3 : les solutions de

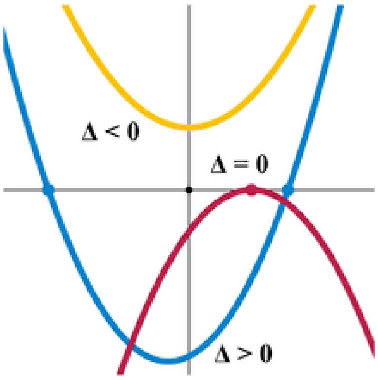

FIGURE 2.3 – Equation du second degré et interprétation géométrique

l'équation sont les abscisses des points d'intersection du graphe de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ et de l'axe des x.

Sur le corps des nombres complexes, une équation du second degré a toujours exactement deux racines distinctes ou une racine double.
On suppose que a, b et c sont trois nombres complexes tels que a soit non nul. Il est toujours possible d'écrire l'équation sous la forme canonique. En simplifiant par a, l'équation est équivalente à :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \qquad \text{avec} \qquad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Soit δ une racine carrée du discriminant. L'équation se résout alors comme dans le cas réel, c'est-à-dire qu'elle s'écrit :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2 = 0 \qquad \text{avec} \qquad \delta^2 = \Delta$$

L'identité remarquable traitant de la différence de deux carrés permet encore d'écrire dans l'ensemble des nombres complexes :

$$\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right) = 0.$$

On a donc montré

Théorème 2.8 *Une équation du second degré à coefficients dans les nombres complexes admet deux solutions z_1 et z_2. Si le discriminant est nul, les deux solutions sont confondues. Dans le cas général, les solutions s'écrivent :*

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a} \qquad \textit{avec} \qquad \delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac.$$

Remarque 2.4 Si les coefficients a, b et c sont réels, le discriminant Δ est réel lui aussi.

— Si $\Delta > 0$, on a deux racines réelles

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\,, \qquad z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\,.$$

— Si $\Delta = 0$, on a une racine double (ou de multiplicité 2)

$$z = \frac{-b}{a}\,.$$

— Si $\Delta < 0$, les deux racines sont complexes conjuguées l'une de l'autre

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} , \qquad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} .$$

Exemple 2.9 1. Considérons l'équation

$$z^2 + 2iz - 2 = 0 .$$

Le discriminant vaut $\Delta = -4 + 8 = 4$, il est donc réel positif. On a deux racines distinctes

$$z_1 = \frac{-2i+2}{2} = 1 - i , \qquad z_2 = \frac{-2i-2}{2} = -1 - i .$$

2. Considérons l'équation

$$z^2 + 2iz - 1 = 0 .$$

Le discriminant vaut $\Delta = -4 + 4 = 0$, il y a une racine de multiplicité 2

$$z = -i .$$

3. Considérons l'équation

$$z^2 + 2iz + i = 0 .$$

Le discriminant vaut $\Delta = -4 - 4i = -4(1+i) = 4\sqrt{2}e^{5i\pi/4}$. Une racine carrée de Δ est $\delta = 2\sqrt[4]{2}e^{5i\pi/8}$, et on a donc deux racines distinctes

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-2i + 2\sqrt[4]{2}e^{5i\pi/8}}{2} &&= \sqrt[4]{2}\cos\left(\tfrac{5\pi}{8}\right) + i\left(-1 + \sqrt[4]{2}\sin\left(\tfrac{5\pi}{8}\right)\right) , \\ z_2 &= \frac{-2i - 2\sqrt[4]{2}e^{5i\pi/8}}{2} &&= -\sqrt[4]{2}\cos\left(\tfrac{5\pi}{8}\right) + i\left(-1 - \sqrt[4]{2}\sin\left(\tfrac{5\pi}{8}\right)\right) . \end{aligned}$$

Nous venons de voir que toute équation du second degré du type (2.1) admet deux racines complexes (éventuellement confondues), données dans le théorème 2.8. En notant

$$Q(x) = ax^2 + bx + c$$

le polynôme du second degré correspondant, ceci conduit à la factorisation

$$Q(x) = a(x - z_1)(x - z_2) .$$

Nous allons voir dans le Théorème 2.9 ci-dessous un résultat analogue valide pour des polynômes de degré quelconque. Auparavant, il est utile de faire une petite remarque.

Remarque 2.5 En développant l'expression factorisée de $Q(x)$ et en identifiant avec l'expression de Q, on obtient la forme suivante de la somme et du produit des racines :

$$S = z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} , \qquad P = z_1 z_2 = \frac{c}{a} .$$

Théorème 2.9 (Théorème fondamental de l'algèbre, ou de d'Alembert–Gauss) *Soit*

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

un polynôme à coefficients complexes et de degré n. Alors l'équation $P(z) = 0$ admet exactement n solutions complexes comptées avec leur multiplicité. En d'autres termes il existe des nombres complexes

$z_1, \ldots, z_n$ *(dont certains sont éventuellement confondus) tels que*

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n) \ .$$

Remarque 2.6 Ce résultat est un résultat d'existence : il dit que la factorisation est possible... mais ne décrit pas comment l'obtenir. Nous savons comment le faire dans le cas $n = 2$, et on peut montrer qu'il existe des méthodes pour les cas $n = 3$ et $n = 4$. Par contre, dans le cas $n \geq 5$, une théorie due à E. Galois montre qu'il n'est plus possible de construire une méthode générique permettant de calculer les racines.

Remarque 2.7 Il existe certaines équations de degré supérieur à 2 qui peuvent être résolues simplement avec les techniques vues ci-dessus.

— **Equations bicarrées :** Une équation de la forme

$$ax^4 + bx^2 + c$$

peut être facilement résolue en remarquant que comme elle ne fait pas apparaître de terme de degré impair, on peut poser $x^2 = X$ ce qui ramène à résoudre l'équation

$$aX^2 + bX + c = 0 \ ,$$

ce que l'on fait par la méthode habituelle. On obtient donc deux racines X_1 et X_2 (généralement complexes, éventuellement confondues), dont on doit prendre les racines carrées pour obtenir les racines de l'équation initiales. Ces dernières sont donc de la forme $\pm X_1^{1/2}$ et $\pm X_2^{1/2}$.

— **Equations du troisième degré :** il existe des techniques générales permettant de résoudre des équations du type

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \ .$$

— Une première consiste à chercher une "racine évidente". Par exemple, on peut montrer que s'il existe une racine entière, alors d/a doit être entier, et cette racine doit nécessairement être un diviseur de d/a. En notant x_1 une telle racine évidente (si on la trouve), on a alors nécessairement une factorisation de la forme

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x^2 + \alpha x + \beta) \ ,$$

où α et β sont deux scalaires à identifier. Une fois ceci fait, les deux racines manquantes de l'équation du troisième degré sont les racines de l'équation $x^2 + \alpha x + \beta = 0$.

— Pour les équations de degré trois du type

$$x^3 + px + q = 0 \ ,$$

il existe une formule explicite, appelée **formule de Cardan**, qui donne les racines... et n'est pas au programme.

Exemple 2.10 On considère l'équation du quatrième degré

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \ .$$

Posons $X = x^2$, l'équation devient

$$X^2 - 3X + 2 = 0 \ ,$$

le discriminant vaut $\Delta = 9 - 8 = 1$, donc les racines sont

$$X_1 = 2 \ , \qquad X_2 = 1 \ .$$

Les racines de l'équation bicarrée sont donc

$$x_1 = \sqrt{2}\ , \quad x_2 = -\sqrt{2}\ , \quad x_3 = 1\ , \quad x_4 = -1\ .$$

Exemple 2.11 On considère l'équation du troisième degré

$$x^3 - 6x^2 + 7x + 4 = 0$$

Posons

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 7x + 4\ .$$

Les racines évidentes, s'il en existe, sont à chercher parmi les diviseurs de 4, c'est à dire ± 1, ± 2 et ± 4. On constate que $P(4) = 0$, $x_0 = 4$ est racine. $P(x)$ admet un facteur égal à $(x-4)$. On va donc chercher des nombres α et β tels que

$$P(x) = (x-4)(x^2 + \alpha x + \beta)\ .$$

En développant ce produit, on obtient

$$P(x) = x^3 + (\alpha - 4)x^2 + (\beta - 4\alpha)x - 4\beta\ .$$

Par identification, on est conduit à poser $-4\beta = -4$ et $\alpha - 4 = -6$, soit $\beta = -1$ et $\alpha = -2$.
Pour finir cette partie du travail, on vérifie bien en développant

$$x^3 - 6x^2 + 7x + 4 = (x-4)(x^2 - 2x - 1)\ .$$

Pour trouver les autres racines, s'il y en a, il suffit de résoudre l'équation

$$x^2 - 2x - 1 = 0\ .$$

Le discriminant vaut $\Delta = 8$, d'où on déduit les racines de $x^2 - 2x - 1$, qui sont

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}\ , \qquad x_2 = \frac{2-\sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}\ .$$

La liste de toutes les racines de l'équation $x^3 - 6x^2 + 7x + 4 = 0$ est donc

$$\left\{4, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\right\}\ .$$

2.3 Transformations du plan

On a déjà rencontré au chapitre précédent les transformations du plan, et le lien avec le plan complexe. On reprend ici les principaux exemples de transformation du plan :

1. Translation d'un vecteur $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$: $t_{\vec{u}}$, représenté par la fonction

$$f : z = a + ib \to f(z) = z + z_{\vec{u}}\ , \quad \text{où} \quad z_{\vec{u}} = x + iy\ .$$

2. Rotation de centre C et d'angle θ : r_θ^C, représenté par la fonction

$$f : z = a + ib \in \mathbb{C} \to f(z) = z_C + e^{i\theta}.(z - z_C)\ ,$$

   où z_C est l'affixe du point C du plan.

3. Homothétie de centre C et de rapport λ : h_λ^C, représentée par la fonction

$$f : z = a + ib \to f(z) = z_C + \lambda.(z - z_C) ,$$

où z_C est l'affixe du point C du plan.

4. Similitude directe de centre C, de rapport λ et d'angle θ : $s_{\lambda,\theta}^C$, représentée par la fonction

$$f : z = a + ib \to f(z) = z_C + \xi.(z - z_C) ,$$

où z_C est l'affixe du point C du plan et $|\xi| = \lambda$ et $\arg(\xi) = \theta$.

5. Réflexions particulières : La réflexion par rapport à l'axe $(O, \vec{\imath})$ est représentée par la fonction

$$f : z = a + ib \to f(z) = \overline{z} ,$$

et la réflexion par rapport à l'axe $(O, \vec{\jmath})$ est représentée par la fonction

$$g : z = a + ib \to g(z) = -\overline{z} .$$

Considérons maintenant une fonction

$$f : z \in \mathbb{C} \longmapsto f(z) = \alpha z + \beta , \qquad \text{où} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} .$$

On voit facilement que si $\beta = 0$, f est une similitude directe de centre O, d'angle $\arg(\alpha)$ et de rapport $|\alpha|$.
Supposons maintenant $\beta \neq 0$. Cherchons si f admet un point fixe, c'est à dire un complexe z_0 tel que $f(z_0) = z_0$. Cette équation n'a de solution que si $\alpha \neq 1$, la solution est dans ce cas là $z_0 = \beta/(1 - \alpha)$.
Ecrivons maintenant

$$f(z) = \alpha z + \beta = \alpha z + (1 - \alpha) z_0 = z_0 + \alpha(z - z_0) .$$

On reconnaît là une similitude directe de centre C d'affixe z_0 et de rapport α. On a donc montré

Théorème 2.10 *Soit $f : z \in \mathbb{C} \longmapsto f(z) = \alpha z + \beta \in \mathbb{C}$, telle que $\alpha \neq 0$.*

1. *Si $\alpha = 1$, alors $f = t_{\vec{u}}$, translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe β.*
2. *Si $\alpha = 1$, alors f est une similitude directe de centre*

$$z_0 = \frac{\beta}{1 - \alpha}$$

d'angle $\arg(\alpha)$ et de rapport $|\alpha|$.

3. *Si $\beta = 0$, alors f est une similitude directe de centre O, d'angle $\arg(\alpha)$ et de rapport $|\alpha|$.*

Exemple 2.12 Considérons la transformation du plan donnée par la fonction

$$f : z \longmapsto f(z) = 2iz - 3 .$$

D'après ce qui précède, il s'agit d'une similitude directe de centre C d'affixe $z_C = -3/(1 - 2i) = (-3 - 6i)/5$, soit donc $C(-3/5, -6/5)$, et de rapport 2 et d'angle $\pi/2$.

Remarque 2.8 Dans le même ordre d'idées, les similitudes indirectes peuvent se mettre sous la forme

$$g : z \in \mathbb{C} \longmapsto \alpha\overline{z} + \beta ,$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$.

2.4 La formule du binôme de Newton

Les coefficients binomiaux, définis pour tout entier naturel n et tout entier naturel k inférieur ou égal à n, donnent le nombre de parties de k éléments (aussi appelées k-listes) dans un ensemble de n éléments. On les note $\binom{n}{k}$ (k parmi n) ou C_n^k (combinaison de k parmi n). Cette quantité s'exprime à l'aide de la fonction factorielle :

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1 \ , \qquad \text{pour } n \in \mathbb{N} \ . \tag{2.3}$$

Par convention, on dit que $0! = 1$. De plus, on a la relation

$$n! = (n-1).(n-1)! \ .$$

Ceci posé, les coefficients binomiaux s'écrivent

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \ . \tag{2.4}$$

L'expression $\binom{n}{k}$ du nombre de parties à k éléments, c'est-à-dire du nombre de k-combinaisons, dans un ensemble à n éléments se détermine en utilisant les arrangements. On calcule le nombre d'arrangements ou de listes ordonnées à k éléments pris dans l'ensemble à n éléments de deux façons différentes. La confrontation des deux calculs donne l'expression algébrique de $\binom{n}{k}$.

— Une liste ordonnée de k éléments pris parmi n peut être constituée en choisissant le premier élément parmi n, (n choix possibles), puis le deuxième élément parmi $n-1$ ($n-1$ choix possibles), etc, le dernier élément étant choisi parmi $n-k+1$ éléments. Il existe donc

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

listes ordonnées de k éléments pris parmi n. Ici $n!$ désigne la factorielle de n.

— On peut aussi choisir d'abord le sous-ensemble des k éléments parmi n ($\binom{n}{k}$ choix possibles) puis ordonner l'ensemble pour constituer une liste (il existe $k!$ ordres possibles). Le nombre de listes ordonnées de k éléments pris parmi n vaut donc $\binom{n}{k} \times k!$.

En confrontant ces deux expressions, on obtient l'expression de $\binom{n}{k}$ donnée en (2.4), pour k variant de 0 à n. Si k est strictement négatif ou strictement supérieur à n, on convient que le coefficient binomial est nul.

Exemple 2.13 *Dans un ensemble à 4 éléments $\{a,b,c,d\}$, il y a $\binom{4}{2} = 6$ parties à deux éléments, à savoir : $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$, $\{b,c\}$, $\{b,d\}$, $\{c,d\}$.*

Les coefficients binômiaux satisfont la propriété de symétrie suivante

Proposition 2.1 *Soient $0 \leq p \leq n$ deux entiers. Alors*

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \ .$$

Une importante relation, la formule de Pascal, lie les coefficients binomiaux.

Proposition 2.2 (Formule de Pascal) *Soient n, k deux entiers naturels, tels que $k \leq n$. Alors*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \tag{2.5}$$

Preuve : Soit E un ensemble à $n+1$ éléments et soit e un élément particulier de E. Le nombre de sous-ensembles de $k+1$ éléments de E est la somme du nombre de sous-ensembles ne contenant pas e

1																
1	1															
1	2	1														
1	3	3	1													
1	4	6	4	1												
1	5	10	10	5	1											
1	6	15	20	15	6	1										
1	7	21	35	35	21	7	1									
1	8	28	56	70	56	28	8	1								
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1							
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1						
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1					
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1				
1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1			
1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1		
1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1	
1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008	4368	1820	560	120	16	1

FIGURE 2.4 – Les coefficients $\binom{n}{k}$, $k \in [\![0;n]\!]$ figurent à la n-ième ligne. Le triangle est construit en plaçant des 1 aux extrémités de chaque ligne et en complétant la ligne en reportant la somme des deux nombres adjacents de la ligne supérieure.

et du nombre de sous-ensembles contenant e. Les premières sont les parties à $k+1$ éléments de $E\backslash\{e\}$ (lire E privé de e) donc il y en a $\binom{n}{k+1}$. Les secondes s'obtiennent en ajoutant e à une partie à k éléments de $E\backslash\{e\}$, il y en a $\binom{n}{k}$. ♠

Cette proposition donne lieu à un algorithme de calcul des coefficients du binôme, appelé *triangle de Pascal*, utilisable pour de petites valeurs de n. Les premières lignes du triangle de Pascal sont représentées en Figure 2.4.

Les coefficients binômiaux interviennent dans la formule du binôme de Newton, déja vue plus haut.

Théorème 2.11 *Pous tous $x, y \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a la relation*

$$(x+y)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} x^n y^{N-n} = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} x^{N-n} y^n \ .$$

<u>*Preuve :*</u> ce résultat se démontre par récurrence. L'initialisation est évidente, car

$$(x+y)^0 = 1$$

satisfait la relation.

Supposons maintenant la propriété vraie au rang p :

$$(x+y)^p = \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} x^n y^{p-n}$$

et calculons

$$\begin{aligned}
(x+y)^{p+1} &= (x+y)(x+y)^p \\
&= (x+y)\left(\sum_{n=0}^{p}\binom{p}{n}x^n y^{p-n}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{p}\binom{p}{n}x^{n+1}y^{p-n} + \sum_{n=0}^{p}\binom{p}{n}x^n y^{p-n+1} \\
&= \sum_{m=1}^{p+1}\binom{p}{m-1}x^m y^{p+1-m} + \sum_{m=0}^{p}\binom{p}{m}x^m y^{p+1-m} \\
&= \binom{p}{0}x^0 y^{p+1} + \sum_{m=1}^{p}\left[\binom{p}{m-1}+\binom{p}{m}\right]x^m y^{p+1-m} + \binom{p}{p}x^{p+1}y^0 \\
&= x^0 y^{p+1} + \sum_{m=1}^{p}\binom{p+1}{m}x^m y^{p+1-m} + x^{p+1}y^0 \\
&= \sum_{m=0}^{p+1}\binom{p+1}{m}x^m y^{p+1-m}\ ,
\end{aligned}$$

de sorte que la propriété est satisfaite au rang $p+1$. Ceci conclut la démonstration. ♠

Cette formule est importante car utile dans de très nombreux contextes, comme dans l'exemple ci-dessous

Exemple 2.14 Cherchons à linéariser $\cos^4\theta$. Pour cela on écrit

$$\begin{aligned}
\cos^4\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4 \\
&= \frac{1}{16}\left[\binom{4}{0}e^{4i\theta} + \binom{4}{1}e^{3i\theta}e^{-i\theta} + \binom{4}{2}e^{2i\theta}e^{-2i\theta} + \binom{4}{3}e^{i\theta}e^{-3i\theta} + \binom{4}{4}e^{-4i\theta}\right] \\
&= \frac{1}{16}\left[e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 6\right]\ .
\end{aligned}$$

Chapitre

3 Polynômes

3.1 Généralités, définitions et propriétés simples

3.1.1 Généralités

On considère généralement des polynômes à coefficients réels, ou complexes, ou parfois entiers. L'ensemble des nombres que l'on utilise pour définir les polynômes constitue ce que l'on appelle un corps commutatif qui est, pour simplifier, une structure dans laquelle il est possible d'effectuer des additions, des soustractions, des multiplications et des divisions.

Définition 3.1 *Un corps commutatif est un triplet* $(\mathbb{K}, +, .)$ *constitué d'un ensemble* $\mathbb{K}$ *et de deux opérations, l'addition "+"et la multiplication ".", telles que*

1. $\mathbb{K}$ *est stable par addition et multiplication :* $\forall k, k' \in \mathbb{K}$, $k + k' \in \mathbb{K}$ *et* $k.k' \in \mathbb{K}$.
2. *L'addition dans* $\mathbb{K}$ *est commutative, associative, munie d'un élément neutre noté* 0*, et chaque élément* $k \in \mathbb{K}$ *possède un opposé noté* $-k$ *tel que* $k + (-k) = 0$.
3. *La multiplication dans* $\mathbb{K}^*$ *(qui est* $\mathbb{K}$ *privé de 0) est commutative, associative, munie d'un élément neutre noté* 1*, et chaque élément* $k \in \mathbb{K}$ *possède un inverse noté* k^{-1} *tel que* $k.k^{-1} = 1$.
4. *La multiplication est distributive par rapport à l'addition :* $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$, $a.(b + c) = a.b + a.c$ *et* $(b + c).a = b.a + c.a$.

Les exemples classiques de corps commutatifs sont
- L'ensemble des nombres rationnels, $(\mathbb{Q}, +, .)$ muni de l'addition et la multiplication usuelles ;
- l'ensemble des nombres réels $(\mathbb{R}, +, .)$ muni de l'addition et la multiplication usuelles ;
- L'ensemble des nombres complexes, $(\mathbb{C}, +, .)$ muni de l'addition et la multiplication usuelles ;
- L'ensemble $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, .)$ des entiers modulo p, où p est un nombre premier, muni de l'addition et la multiplication modulo p ;

3.1.2 Polynômes

Définition 3.2 *Soit* $\mathbb{K}$ *un corps commutatif. On appelle polynôme à une indéterminée avec coefficients dans* $\mathbb{K}$ *toute suite*

$$P = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$$

d'éléments de $\mathbb{K}$ *tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux. Les* a_i *sont appelés coefficients du polynôme. L'ensemble de tous les polynômes à une indéterminée avec coefficients dans* $\mathbb{K}$ *est noté* $\mathbb{K}[X]$.

Cette définition peut apparaître formelle, et doit être mise en correspondance avec l'écriture plus habituelle

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n + \dots \ .$$

On voit bien qu'à tout polynôme tel que défini dans la Définition 3.2 on peut faire correspondre un tel $P(X)$, et inversement. Ces deux notions sont donc identiques.

Définition 3.3 *1. On appelle degré du polynôme $P = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$ le plus grand entier n tel que $a_n \neq 0$. On note $d^\circ(P)$ le degré de P. Par convention, si tous les coefficients a_i sont nuls on pose $d^\circ(P) = -\infty$.*

2. Le coefficient de plus haut de degré d'un polynôme P est appelé coefficient dominant de P. Si le coefficient dominant est égal à 1, le polynôme est unitaire.

3. Si $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Par exemple, $d^\circ(3, 2, 1, 0, 0, \dots) = d^\circ(3 + 2X + X^2) = 2$.

3.1.3 Opérations sur les polynômes

On peut munir $\mathbb{K}[X]$ de trois opérations :

1. Une loi de composition interne, appelée addition, définie par
$$\{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\} + \{b_0, b_1, \dots, b_n, \dots\} = \{a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n, \dots\} \tag{3.1}$$
pour tous $\{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}, \{b_0, b_1, \dots, b_n, \dots\} \in \mathbb{K}[X]$.
2. Une multiplication externe, définie de la façon suivante : pour tout $\{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\} \in \mathbb{K}[X]$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$\lambda.\{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\} = \{\lambda.a_0, \lambda.a_1, \dots, \lambda.a_n, \dots\}\ . \tag{3.2}$$
3. Une multiplication interne, définie de la façon suivante : pour tous $P = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$, $Q = \{b_0, b_1, \dots, b_n, \dots\} \in \mathbb{K}[X]$, $P.Q = \{c_0, c_1, \dots, c_n, \dots\} \in \mathbb{K}[X]$ est défini par
$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\ . \tag{3.3}$$

Il faut noter que la multiplication interne peut aussi se voir de la façon suivante : en notant
$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \dots\ , \quad Q(X) = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + b_3 X^3 + \dots$$
on voit que le produit PQ prend la forme
$$P(X)Q(X) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)X + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)X^2 + \dots\ ,$$
ce qui justifie la définition de ce produit.

Exemple 3.1 Soient $P = (1, 2, 3)$ et $Q = (1, 1)$, et calculons $PQ = (c_0, c_1, c_2)$:
$$c_0 = 1\ ; \quad c_1 = a_0 b_1 + a_2 b_0 = 3\ ; \quad c_2 = a_1 b_1 + a_2 b_0 = 5\ ; \quad c_3 = a_2 b_1 = 3\ .$$

Le résultat qui suit est une conséquence directe de la définition du produit interne.

Proposition 3.1 *Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.*
- *$d^\circ(P + Q) = \max(d^\circ(P), d^\circ(Q))$ avec égalité si et seulement si $d^\circ(P) = d^\circ(Q)$ et les coefficients dominants (i.e. d'indice maximal) de P et Q sont opposés.*
- *$d^\circ(PQ) = d^\circ(P) + d^\circ(Q)$, où par convention, $-\infty + n = -\infty$.*
- *$d^\circ(\lambda P) = d^\circ(P)$ si $\lambda \neq 0$ et $-\infty$ sinon.*

Proposition 3.2 *Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors $PQ = 0$ si et seulement si $P = 0$ ou $Q = 0$.*

Preuve : il suffit de raisonner sur le degré : comme $d^\circ(PQ) = d^\circ(P) + d^\circ(Q)$, alors $d^\circ(PQ) = -\infty$ si et seulement si $d^\circ(P) = -\infty$ ou $d^\circ(Q) = -\infty$, c'est à dire $P = 0$ ou $Q = 0$. ♠

Propriétés 3.1 1. L'addition des polynômes a les propriétés suivantes :
- Commutativité : $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P + Q = Q + P$.
- Associativité : $\forall P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$, $(P + Q) + R = P + (Q + R)$
- Existence d'un élément neutre $0 = (0, 0, 0, \dots)$: $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $P + 0 = 0 + P = P$.
- Existence d'un opposé de tout polynôme : $\forall P = (a_0, a_1, \dots) \in \mathbb{K}[X]$, $-P = (-a_0, -a_1, \dots)$ est tel que $P + (-P) = 0$.

2. Le produit externe a les propriétés suivantes :
- Distributivité : $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda(P + Q) = \lambda P + \lambda Q$.
- $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $(\lambda + \mu)P = \lambda P + \mu P$.
- $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda(\mu P) = (\lambda\mu)P$.

3. Le produit interne a les propriétés suivantes
- Commutativité : $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $PQ = QP$.
- Associativité : $\forall P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$, $(PQ)R = P(QR)$
- Existence d'un élément neutre $1 = (1, 0, 0, \dots)$: $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $1.P = P.1 = P$.
- Distributivité par rapport à l'addition : $\forall P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$, $P.(Q + R) = P.Q + P.R$.

L'ensemble de ces propriétés font que $\mathbb{K}[X]$ a une structure d'anneau.

Remarque 3.1 $\mathbb{K}$ peut être identifié à $\mathbb{K}_0[X]$, en associant à tout $a \in \mathbb{K}$ le polynôme $(a, 0, 0, \dots)$. On identifie ainsi 1 au polynôme $(1, 0, 0, \dots)$. Dans le même ordre d'idées, on identifie X au polynôme $(0, 1, 0, \dots)$, $X^2 = X.X$ à $(0, 0, 1, 0, \dots)$ et ainsi de suite. Avec ces notations, on a bien

$$\begin{aligned}(a_0, a_1, a_2, \dots, a_i, \dots) &= a_0(1, 0, 0, \dots) + a_1(0, 1, 0, \dots) + \dots + a_i(0, 0, 0, \dots, 1, \dots) + \dots \\ &= a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_iX^i + \dots\end{aligned}$$

Par ailleurs, on peut noter par exemple que

$$(0, 1, 0, 0, \dots).(0, 1, 0, 0, \dots) = (0, 0, 1, 0, \dots)$$

ce qui est bien compatible avec la règle classique $X.X = X^2$.

Définition 3.4 *La famille de monômes $\{1, X, X^2, \dots\}$ est appelée* **base canonique** *de $\mathbb{K}[X]$. Tout $P \in \mathbb{K}[X]$ admet une unique décomposition sur cette base :*

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \ .$$

Définition 3.5 *Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est inversible s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P.Q = 1$. On note $Q = P^{-1}$.*

On a déjà vu que $d^\circ(PQ) = d^\circ(P) + d^\circ(Q)$. Donc, comme $d^\circ(1) = 0$, P est inversible seulement si $d^\circ(P) = 0$, soit $P = (a_0, 0, 0, \dots)$. Dans ce cas, $P^{-1} = (a^{-1}, 0, 0, \dots)$. On a donc montré

Proposition 3.3 *L'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{K}[X]$ peut être identifié à $\mathbb{K}^*$.*

Définition 3.6 *Soient $P = (a_0, a_1, \dots), Q = (b_0, b_1, \dots) \in \mathbb{K}[X]$. Le composé de P et Q, noté $P \circ Q$ est défini par*

$$(P \circ Q)(X) = P(Q(X)) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i Q(X)^i \ .$$

Remarque 3.2 Il est possible de démontrer que la composition des polynômes est associative : $\forall P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$,

$$(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R) \ ,$$

mais n'est pas commutative : si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$

$$P \circ Q \neq Q \circ P \qquad \text{en général} .$$

de plus, $d^\circ(P \circ Q) = d^\circ(Q \circ P) = d^\circ(P) d^\circ(Q)$.

Exemple 3.2 Soient $P(X) = X^2 + 1$ et $Q(X) = X^2 + 2$, alors

$$(P \circ Q)(X) = (X^2+2)^2 + 1 = X^4 + 4X^2 + 5 , \qquad (Q \circ P)(X) = (X^2+1)^2 + 2 = X^4 + 2X^2 + 3 .$$

On voit bien que $P \circ Q \neq Q \circ P$.

3.2 Division Euclidienne, PGCD, PPCM

3.2.1 Division Euclidienne

Théorème 3.1 (Division Euclidienne) *Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, avec $Q \neq 0$. Il existe un unique couple (Q, R) avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $R \in \mathbb{K}[X]$, et $d^\circ(R) < d^\circ(B)$, tels que*

$$A = QB + R .$$

Preuve :

- Commençons par prouver l'unicité du couple (Q, R). Supposons qu'il existe deux couples (Q, R) et (Q', R') tels que $A = QB + R = Q'B + R'$. On en déduit que $(Q - Q')B = (R - R')$. Or, $d^\circ(R - R') \leq \max(d^\circ(R), d^\circ(R')) < d^\circ(B)$. On en déduit donc que $Q - Q' = 0$, et de là aussi $R - R' = 0$.
- Montrons maintenant l'existence. Soient $A = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n$ et $B = \sum_{n=0}^{M} b_n X^n$, où $N = d^\circ(A)$ et $M = d^\circ(B)$. Supposons d'abord que $M > N$. Alors on a $A = 0 \times B + A$, ce qui donne directement la décomposition cherchée.
  Supposons maintenant $M \leq N$, et notons $\delta = N - M$. On va raisonner par récurrence sur n.
  - Si $\delta = 0$ (donc $M = N$), posons $Q = a_N/b_N$, et $R = A - QB$. On a bien

    $$A = QB + R \qquad \text{avec} \qquad R = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n - \sum_{n=0}^{N} \frac{a_N}{b_N} b_n X^n = \sum_{n=0}^{N-1} \left(a_n - \frac{a_N}{b_N} b_n \right) X^n ,$$

    donc $d^\circ(R)$. Le couple (Q, R) satisfait les conditions données.
  - Si $\delta \neq 0$ (donc $N > M$), soient $P_1 = a_N X^\delta / b_M$, et $R_1 = A - QP_1$. On a alors

    $$P = QP_1 + R_1 \quad \text{avec} \quad R_1 = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n - \sum_{n=0}^{M} \frac{a_N}{b_N} b_n X^{n+N-M} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n X^n - \sum_{n=0}^{M-1} \frac{a_N}{b_N} X^{n+N-M} ,$$

    donc $d^\circ(R_1) < d^\circ(A)$. Si $d^\circ(R_1) < d^\circ(B)$, le couple (P_1, R_1) satisfait les conditions fixées, on ne va pas plus loin et on pose $Q = P_1$ et $R = R_1$.
    Si $d^\circ(R_1) < d^\circ(B)$, on peut appliquer la même procédure à R_1, et obtenir une décomposition

    $$R_1 = P_2 B + R_2 , \qquad \text{avec} \qquad d^\circ(R_2) < d^\circ(R_1) .$$

  - On peut ainsi itérer cette procédure et obtenir une suite de restes R_k, tant que $d^\circ(R_k) \geq d^\circ(B)$. Soit K le premier entier tel que $d^\circ(R_K) < d^\circ(B)$. On a alors

    $$A = P_1 B + R_1 = P_1 B + P_2 B + R_2 = \cdots = (P_1 + P_2 + \cdots P_K)B + R_K ,$$

et il suffit de poser

$$Q = P_1 + P_2 + \cdots P_K \ , \qquad R = R_K$$

pour terminer la preuve. ♠

Définition 3.7 *Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Avec les notations ci-dessus, A et R sont respectivement appelés* **quotient** *et* **reste** *de la division Euclidienne de P par Q. On dit que Q divise P s'il existe $A \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = AQ$. Si P n'est pas nul, ceci équivaut à dire que le reste de la division Euclidienne de P par Q est nul.*

Exemple 3.3 Calculons la division euclidienne de $A(X) = X^3 + X^2 - 1$ par $B(X) = X - 1$. En appliquant la méthode ci-dessus, soit $P_1(X) = X^2$, on a alors $A(X) = P_1(X)B(X) + R_1(X)$ avec $R_1(X) = 2X^2 - 1$. Comme $d^\circ(R_1) \geq d^\circ(B)$, soit donc $P_2(X) = 2X$, on a donc $R_1(X) = P_2(X)B + R_2$ avec $R_2(X) = 2X - 1$. $d^\circ(R_2) = d^\circ(B)$, soient donc $P_3 = 2$ et $R_3 = R_2 - P_3 B = 1$. Cette fois $d^\circ(R_3) = 0 < d^\circ(B)$, on arrête là la décomposition, et on obtient donc

$$X^3 + X^2 - 1 = (X - 1)(X^2 + 2X + 2) + 1 \ .$$

Ces opérations peuvent se présenter sous la forme d'une division "classique" :

$$
\begin{array}{rrrr|lll}
X^3 & +X^2 & & -1 & X & -1 & \\ \cline{5-7}
-X^3 & +X^2 & & & X^2 & +2X & +2 \\ \cline{1-4}
 & 2X^2 & & -1 & & & \\
 & -2X^2 & +2X & & & & \\ \cline{2-4}
 & & 2X & -1 & & & \\
 & & -2X & +2 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & +1 & & &
\end{array}
$$

On peut faire un certain nombre de remarques :

Propriétés 3.2
- Si $A = 0$ est le polynôme nul, alors tout $B \in \mathbb{K}[X]$ divise A.
- Si $B = 0$ et si B divise $A \in \mathbb{K}[X]$, alors $A = 0$.
- Si $B \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme constant non nul, alors B divise tout $A \in \mathbb{K}[X]$.
- Si B divise A, alors $d^\circ(B) \leq d^\circ(A)$ ou $A = 0$.

Proposition 3.4 *Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Si A divise B et B divise A, alors A et B sont proportionnels : il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $B = \lambda A$. On dit que A et B sont associés.*

Preuve : Si A divise B alors $d^\circ(A) \leq d^\circ(B)$, et si B divise A alors $d^\circ(B) \leq d^\circ(A)$. Donc $d^\circ(B) = d^\circ(A)$, et $B = QA$ avec $d^\circ(Q) = 0$. Donc $Q = \lambda \in \mathbb{K}$. ♠

3.2.2 PGCD, algorithme d'Euclide

Définition 3.8 *Soient $U, V \in \mathbb{K}[X]$. On appelle* PGCD *de U et V tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que*

1. *P divise U et V.*
2. *Quel que soit $C \in \mathbb{K}[X]$, diviseur de U et V, il est aussi diviseur de P.*

Propriétés 3.3
- Pour tous $A, B \in \mathbb{K}[X]$, tout PGCD de A et B est évidemment un PGCD de B et A.
- Si P est un PGCD de A et B, alors λP est aussi un PGCD de A et B, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
- Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$, et soit P un PGCD de A et B. Alors CP est un PGCD de CA et CB.

Proposition 3.5 *Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.*

1. *A et B n'admettent que 0 comme* PGCD *si et seulement si $A = B = 0$.*
2. *Si A et B admettent un* PGCD *non nul, alors tous les* PGCD *sont proportionnels. Il existe un unique* PGCD *unitaire.*

Preuve :

1. La première partie est une conséquence du fait que si 0 divise $A \in \mathbb{K}[X]$ alors $A = 0$.
2. Soient P, Q deux PGCD de A et B. Comme P divise A et B, il existe P_1 tel que $Q = P_1 P$, donc $d^\circ(Q) \geq d^\circ(P)$. De même, comme Q divise A et B, il existe Q_1 tel que $P = Q_1 Q$, donc $d^\circ(P) \geq d^\circ(Q)$. De là, on déduit que $d^\circ(P) = d^\circ(Q)$, et donc les polynômes P_1 et Q_1 sont des constantes. ♠

On a donc prouvé l'unicité du PGCD (à un facteur multiplicatif près), reste à en prouver l'existence. Celle-ci se déduit de l'algorithme d'Euclide. En effet, considérons $A, B \in \mathbb{K}[X]$, et supposons sans perte de généralité que $B \neq 0$ et que $d^\circ(A) \geq d^\circ(B)$. Alors la division Euclidienne donne

$$A = QB + R \ ,$$

et on en déduit qu'un polynôme divise A et B si et seulement si il divise B et R. Donc les PGCD de A et B sont identiques aux PGCD de B et R. Comme $d^\circ(R) < d^\circ(B)$, on peut itérer cette opération jusqu'à obtenir un reste nul. Le PGCD sera le dernier reste non nul.
On a donc montré

Théorème 3.2 *Si $A, B \in \mathbb{K}[X]$ sont tous deux non nuls, leurs* PGCD *existent et peuvent être obtenus par l'algorithme d'Euclide.*

Exemple 3.4 Soient

$$A(X) = X^7 + 5X^5 - 2X^4 + X^3 - 4X^2 - 4 \ , \qquad B(X) = X^3 - 1 \ .$$

Calculons la division euclidienne

$$
\begin{array}{ccccccc|cccc}
X^7 & +5X^5 & -2X^4 & +X^3 & -4X^2 & & -4 & X^3 & -1 & & \\ \cline{8-11}
-(X^7 & & -X^4) & & & & & X^4 & +5X^2 & -X & +1 \\ \cline{1-7}
& 5X^5 & -X^4 & +X^3 & -4X^2 & & -4 & & & & \\
& -(5X^5 & & & -5X^2) & & & & & & \\ \cline{2-7}
& & -X^4 & +X^3 & +X^2 & & -4 & & & & \\
& & -(-X^4 & & & +X) & & & & & \\ \cline{3-7}
& & & X^3 & +X^2 & -X & -4 & & & & \\
& & & -(X^3 & & & -1) & & & & \\ \cline{4-7}
& & & & X^2 & -X & -3 & & & &
\end{array}
$$

On a donc

$$A = Q_0 B + R_1 \ , \qquad \text{avec} \qquad Q_0(X) = X^4 + 5X^2 - X + 1 \qquad \text{et} \qquad R_1(X) = X^2 - X - 3 \ .$$

Calculons maintenant la division euclidienne de B par R_1 :

$$
\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & & & -1 & X^2 \quad -X \quad -3 \\
\cline{5-5}
-(X^3 & -X^2 & -3X) & & X \quad +1 \\
\cline{1-4}
& X^2 & +3X & -1 & \\
& -(X^2 & -X & -3) & \\
\cline{2-4}
& & 4X & +2 &
\end{array}
$$

Donc

$$B = Q_1 R_1 + R_2 \ , \qquad \text{avec} \qquad Q_1(X) = X + 1 \qquad \text{et} \qquad R_2(X) = 4X + 2 \ .$$

Finalement, on voit aussi que

$$
\begin{array}{rrr|l}
X^2 & -X & -3 & 4X \quad +2 \\
\cline{4-4}
-(X^2 & +X/2) & & X/4 \quad -3/8 \\
\cline{1-3}
& -3X/2 & -3 & \\
& -(-3X/2 & -3/4) & \\
\cline{2-3}
& & -9/4 &
\end{array}
$$

et on a ainsi

$$R_1 = Q_2 R_2 + R_3 \ , \qquad \text{avec} \qquad Q_2(X) = X/4 - 3/8 \qquad \text{et} \qquad R_3(X) = -9/4 \ .$$

R_3 est le dernier reste non nul (il est de degré 0 et la suite des restes a des degrés strictement décroissants), donc $-9/4$ est un PGCD de A et B. Le PGCD unitaire correspondant vaut 1.

Définition 3.9 *Deux polynômes A et B sont premiers entre eux si leur* PGCD *unitaire est égal à 1.*

Remarque 3.3 Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ et soit P un PGCD de A et B. Soient alors $a, b \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A = aP$ et $B = bP$. Soit Q un diviseur commun de a et b. Alors QP est un diviseur commun et A et B, mais comme P est le PGCD, QP divise nécessairement P, donc $d^\circ(Q) = 0$. Par conséquent, a et b sont premiers entre eux.

Exemple 3.5
- Etant donnés $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, avec $\beta \neq \alpha$, les polynômes $X - \alpha$ et $X - \beta$ sont premiers entre eux
- Similairement, si $\beta \neq \alpha$, les polynômes $(X - \alpha)^k$ et $(X - \beta)^\ell$ sont premiers entre eux quels que soient les entiers positifs k, ℓ.
- Les polynômes

$$P(X) = (X - \alpha_1)^{k_1}(X - \alpha_2)^{k_2} \dots (X - \alpha_N)^{k_N} \quad \text{et} \quad Q(X) = (X - \beta_1)^{\ell_1}(X - \beta_2)^{\ell_2} \dots (X - \beta_M)^{\ell_M}$$

  sont premiers entre eux si et seulement si tous les α_n sont différents de tous les β_n, quels que soient les entiers positifs M, N et $k_1, \dots, k_N$ et $\ell_1, \dots, \ell_M$.

Théorème 3.3 (Théorème de Bézout)
1. *Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes non nuls. Alors il existe deux polynômes $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $d^\circ(U) < d^\circ(B)$ et $d^\circ(V) < d^\circ(A)$ et $AU + BV$ est un PGCD de A et B. Des polynômes U et V satisfaisant ces conditions sont appelés* **Polynômes de Bézout** *pour A et B.*
2. *A et B sont premiers entre eux s'il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $d^\circ(U) < d^\circ(B)$ et $d^\circ(V) < d^\circ(A)$ et $AU + BV = 1$.*

<u>Preuve :</u> On peut supposer sans perte de généralité que $d^\circ(A) \geq d^\circ(B)$. On effectue alors des divisions euclidiennes successives

$$\begin{array}{lll} A = Q_0 B + R_1 \ , & R_1 = A - Q_0 B \ , & d^\circ(R_1) < d^\circ(B) \\ B = Q_1 R_1 + R_2 \ , & R_2 = B - Q_1 R_1 \ , & d^\circ(R_2) < d^\circ(R_1) \\ R_1 = Q_2 R_2 + R_3 \ , & R_3 = R_1 - Q_2 R_2 \ , & d^\circ(R_3) < d^\circ(R_2) \\ \dots & & \\ R_{n-2} = Q_{n-1} R_{n-1} + R_n \ , & R_n = R_{n-2} - Q_{n-1} R_{n-1} \ , & d^\circ(R_n) < d^\circ(R_{n-1}) \\ R_{n-1} = Q_n R_n & & \end{array}$$

R_n est le dernier reste non nul et est donc un PGCD de A et B.
Montrons maintenant que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on peut trouver des polynômes U_k et V_k tels que

$$R_{k+1} = AU_k + BV_k \ .$$

On va utiliser un raisonnement par récurrence. La propriété est vrai au rang $k = 0$, comme on le voit en posant $U_0 = 1$ et $V_0 = -Q_0$. Supposons maintenant la propriété vraie jusqu'au rang $k - 1$, c'est à dire supposons $R_\ell = AU_{\ell-1} + BV_{\ell-1}$ pour tout $\ell \leq k$. Alors on a

$$\begin{aligned} R_{k+1} &= R_{k-1} - Q_k R_k = AU_{k-2} + BV_{k-2} - Q_k[AU_{k-1} + BV_{k-1}] \\ &= A[U_{k-2} - Q_k U_{k-1}] + B[V_{k-2} - Q_k V_{k-1}] \end{aligned}$$

ce qui montre que la propriété est vraie au rang k, en posant

$$U_k = U_{k-2} - Q_k U_{k-1} \ , \qquad V_k = V_{k-2} - Q_k V_{k-1} \ .$$

Ceci est vrai en particulier au rang $n - 1$, et on écrit donc R_n (qui est un PGCD de A et B) comme

$$R_n = AU_{n-1} + BV_{n-1} = AU + BV \ ,$$

où on a posé $U = U_{n-1}$ et $V = V_{n-1}$. Etudions maintenant les degrés de ces polynômes. Tout d'abord, on sait que pour tout k, $d^\circ(R_k) < d^\circ(R_{k-1})$. Donc, comme $R_k = R_{k-2} + Q_{k_1} R_{k-1}$, on a $d^\circ(R_k) = d^\circ(Q_{k_1} R_{k-1}) = d^\circ(Q_{k_1}) + d^\circ(R_{k-1})$. Ainsi on en déduit que $d^\circ(Q_k) > 0$ pour tout k. On peut donc en déduire aussi que $d^\circ(U_k) > d^\circ(U_{k-1})$ et $d^\circ(V_k) > d^\circ(V_{k-1})$, la suite des degrés des polynômes U_k et V_k est strictement croissante. Finalement, comme $AU = R_n - BV$ et comme $d^\circ(R_n) \leq d^\circ(B)$, on en déduit que $d^\circ(U) < d^\circ(B)$. On montre de même que $d^\circ(V) < d^\circ(A)$. ♠

Exemple 3.6 Reprenons l'exemple précédent :

$$A(X) = X^7 + 5X^5 - 2X^4 + X^3 - 4X^2 - 4 \ , \qquad B(X) = X^3 - 1 \ .$$

Nous avons vu que

$$\begin{aligned} R_3 &= R_1 - Q_2 R_2 \\ &= R_1 - Q_2(B - Q_1 R_1) \\ &= -Q_2 B + (1 + Q_2 Q_1)(A - Q_0 B) \\ &= (1 + Q_2 Q_1)A - (Q_2 + Q_0 + Q_2 Q_1 Q_0)B \ . \end{aligned}$$

Par identification on trouve

$$U = 1 + Q_2 Q_1 = \frac{2X^2 - X + 5}{8} \ ,$$

$$V = -Q_2 - Q_0 - Q_2 Q_1 Q_0 = \frac{-2\,X^6 + X^5 - 15\,X^4 + 7\,X^3 - 28\,X^2 + 2\,X - 2}{8}$$

et on vérifie bien que $AU + BV = -9/4$.

Remarque 3.4 On déduit de ce qui précède un algorithme de calcul des polynômes de Bézout. A chaque étape on a

$$AU_n + BV_n = R_{n+1} \ , \tag{3.4}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{lcl} R_n & = & Q_n R_{n-1} + R_{n-2} \\ U_n & = & -Q_n U_{n-1} + U_{n-2} \\ V_n & = & -Q_n V_{n-1} + V_{n-2} \end{array} \right. \tag{3.5}$$

L'initialisation se fait via

$$R_0 = B \ , \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} U_{-1} & = & 0 \\ V_{-1} & = & 1 \end{array} \right. \ , \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} U_0 & = & 1 \\ V_0 & = & -Q_0 \end{array} \right. \tag{3.6}$$

En particulier, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1 = -Q_1 \\ V_1 = 1 + Q_0 Q_1 \end{array} \right. \ , \qquad \text{et} \qquad \left\{ \begin{array}{l} U_2 = 1 + Q_1 Q_2 \\ V_2 = -Q_0 - Q_2 - Q_0 Q_2 Q_2 \end{array} \right. \ .$$

Etant donnés trois polynômes A, B et C, tels que C soit divisible par les PGCD de A et B, le théorème de Bézout permet aussi de résoudre des équations du type

$$AC + BD = E \ , \tag{3.7}$$

où C et D dont des polynômes inconnus. En effet, notons P un PGCD de A et B, et soit e tel que $E = Pe$. Le théorème de Bézout montre l'existence de polynômes U et V tels que $AU + BV = P$. En multipliant les deux membres de cette équation par e, on obtient donc $A(eU) + B(eV) = eP = E$, d'où on déduit des solutions $C_0 = eU$ et $D_0 = eV$.
Il est aussi possible de caractériser toutes les solutions. En effet, soient (C, D) et (C', D') deux couples de solutions de l'équation (3.7). On a alors

$$A(C - C') + B(D - D') = 0 \ .$$

Soient maintenant a, b deux polynômes tels que $A = aP$ et $B = bP$. a et b sont premiers entre eux, et l'égalité ci-dessus donne aussi

$$a(C - C') = -b(D - D') \ .$$

Comme a et b sont premiers entre eux, nécessairement $C - C'$ divise b, d'où l'existence d'un polynôme Q tel que $C - C' = bQ$. De là on déduit $abQ = -b(D - D')$, soit $D - D' = -aQ$. La solution générale de l'équation (3.7) est donc

$$C = eU - bQ \ , \quad D = eV + aQ \ , \quad Q \in \mathbb{K}[X] \ , \tag{3.8}$$

où U et V sont les polynômes de Bézout de A et B, et où $a = A/P$, $b = B/P$ et $E = E/P$.

Exemple 3.7 Supposons qu'on cherche à résoudre l'équation

$$(X^3 - 1)C + (X^2 + 1)D = 2X^2 \ .$$

Calculons tout d'abord un PGCD de $A = X^3 - 1$ et $B = X^2 + 1$. L'algorithme d'Euclide donne

$$\begin{array}{lll} A = Q_0 B + R_1 \ , & Q_0(X) = X \ , & R_1(X) = -X - 1 \\ B = Q_1 R_1 + R_2 \ , & Q_1(X) = -X + 1 \ , & R_2(X) = 2 \ . \end{array}$$

On en déduit

$$AU + BV = 2 ,$$

avec $U = U_1 = -Q_1U_0 + U_{-1} = -Q_1$ et $V = V_1 = -Q_1V_0 + V_{-1} = Q_1Q_0 + 1$, soit

$$U(X) = X - 1 \qquad V(X) = -X^2 + X + 1 .$$

On en déduit une solution particulière de notre équation :

$$C_0(X) = X^2(X-1) , \qquad D_0(X) = X^2(-X^2 + X + 1) .$$

De là on peut en déduire la solution générale :

$$C(X) = C_0(X) + Q(X)(X^2+1) , \qquad D(X) = D_0(X) - Q(X)(X^3-1) .$$

Théorème 3.4 (Théorème de Gauss) *Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$ tels que A divise BC et A et B sont premiers entre eux. Alors A divise C.*

Preuve : Comme A et B sont premiers entre eux, il existe U, V tels que $AU + BV = 1$. Donc $AUC + BVC = C$. Comme A divise AUC et BVC, alors A divise C. ♠

Corollaire 3.1 *Soient $A, B, D \in \mathbb{K}[X]$ tels que A et B sont premiers entre eux, et divisent D. Alors AB divise D.*

Définition 3.10 (PPCM) *Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes. Un polynôme divisible par A et B qui divise tout multiple commun de A et B est appelé* PPCM *de A et B.*

Remarque 3.5 On a, pour tous $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non nuls

$$\mathsf{PGCD}(A,B).\mathsf{PPCM}(A,B) = A.B . \tag{3.9}$$

Exemple 3.8 Continuons avec l'exemple précédent : on a

$$A(X) = X^7 + 5X^5 - 2X^4 + X^3 - 4X^2 - 4 , \qquad B(X) = X^3 - 1 .$$

et on a obtenu un PGCD(A, B) égal à $-9/4$. Le PGCD étant défini à un facteur près, on peut prendre $P = 1$ plutôt. Alors un PPCM de A et B est

$$p(X) = A(X)B(X) = X^{10} + 5X^8 - 3X^7 + X^6 - 9X^5 + 2X^4 - 5X^3 + 4X^2 + 4 .$$

Exemple 3.9 On considère maintenant

$$A = 2X^4 - X^3 - 6X^2 - X + 2 , \qquad B = 2X^3 - 5X^2 - 4X + 3 .$$

L'algorithme d'Euclide donne un PGCD égal à $8X^2 + 4X - 4 = 4(X+1)(2X-1)$, on peut aussi prendre pour simplifier

$$P = 2X^2 + X - 1 = (X+1)(2X-1) ,$$

ce qui donne la factorisation

$$A(X) = 4P(X)(X+1)(X-2) , \qquad B(X) = P(X)(X-3) .$$

De là on déduit le PPCM

$$p(X) = P(X)(X+1)(X-2)(X-3) = 2X^5 - 7X^4 - 3X^3 + 17X^2 + 5X - 6 .$$

3.3 Irréductibilité

Définition 3.11 *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, de degré positif. P est irréductible sur $\mathbb{K}$ si pour tous polynômes $B, C \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P = BC$, on a $d^\circ(B) = 0$ ou $d^\circ(C) = 0$.*

Exemple 3.10
1. Tout polynôme de degré 1 est irréductible.
2. Les polynômes $X^2 + 1$ et $X^2 + X + 1$ sont irréductibles sur $\mathbb{R}$ mais ne sont pas irréductibles sur $\mathbb{C}$. En effet on peut écrire
$$X^2 + 1 = (X - i)(X + i \;, \qquad X^2 + X + 1 = (X - 1)(X - j)(X - j^2) \;,$$
mais les facteurs intervenant dans la factorisation sont complexes.

Théorème 3.5 *Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul. Alors il existe un unique $a \in \mathbb{K}^*$ et des polynômes irréductibles unitaires $P_1, \ldots P_K \in \mathbb{K}[X]$ tels que*
$$A = aP_1P_2 \ldots P_K \;.$$
De plus la décomposition est unique, c'est à dire les polynômes $P_1, \ldots P_K \in \mathbb{K}[X]$ sont uniques à permutation près.

Preuve : Soit a le coefficient dominant de A (le coefficient du terme de plus haut degré). Si A n'est divisible par aucun polynômes de degré positif et strictement plus petit que $d^\circ(A)$, A est irréductible et le résultat est prouvé. Sinon soit P_1 un diviseur de A, on écrit $A = P_1Q_1$ comme produit et on répète ce raisonnement sur chaque facteur. Puisque le degré des facteurs décroît strictement, ce procédé se termine en un nombre fini d'étapes.
Pour l'unicité il suffit de voir que deux polynômes irréductibles sont soit égaux à multiplication par une constante non nulle près, soit premiers entre eux. Ceci vient du fait que le PGCD est un diviseur des deux polynômes. Si on choisit les P_i unitaires, ils doivent vraiment coïncider. ♠

Définition 3.12 *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré positif. On dit que P est premier dans $\mathbb{K}[X]$ si quels que soient les polynômes $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que P divise le produit AB alors P divise au moins A ou B.*

Exemple 3.11
1. X est premier. $X - \alpha$ est premier pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$.
2. X^2 n'est pas premier. En effet on a $X.X = X^2$ qui est divisible par X^2, mais X ne l'est pas. De même, $(X - \alpha)^k$ n'est pas premier dès que $k \geq 2$.
3. Plus généralement, étant donnés $A, B \in \mathbb{K}[X]$, le produit AB ne peut être premier, puisqu'il divise AB sans diviser A ni B.

Proposition 3.6 *Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est irréductible sur $\mathbb{K}$ si et seulement s'il est premier dans $\mathbb{K}[X]$.*

Preuve :
1. Supposons P premier. Soient $B, C \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P = BC$. Alors P divise BC et donc divise soit B soit C, soit les deux. Supposons que P divise B, on a ainsi $B = P.Q$. Mais alors $P = PQC$ et donc $d^\circ(C) = 0$ et P est donc irréductible.
2. Supposons maintenant que P soit irréductible et divise BC. D'après le théorème 3.5, P doit apparaître dans la décomposition de BC. L'unicité de cette décomposition assure que les facteurs irréductibles de la décomposition de BC sont l'union des facteurs irréductibles des décompositions de B et C. Donc P doit diviser B ou C, ou les deux et est donc premier. ♠

Théorème 3.6 (Le cas de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$) 1. *Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1 $aX+b$.*

2. *Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 $aX+b$ et les polynômes de degré 2 aX^2+bX+c avec discriminant $\Delta = b^2-4ac$ négatif.*

La première partie de ce théorème est identique au théorème d'Alembert-Gauss vu au chapitre précédent. Elle implique en particulier que tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ peut s'écrire sous la forme

$$P(X) = a(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\dots(X-\alpha_N) \tag{3.10}$$

où $(X-\alpha_1),\dots(X-\alpha_N)$ sont des Polynômes de degré 1 et $N = d^\circ(P)$. On verra que plus loin $\alpha_1,\dots\alpha_N$ sont les racines de P (dont certaines peuvent être identiques).

3.4 Fonction polynômiale, racines, dérivation

3.4.1 Fonction polynômiale

On a traité jusqu'à présent les polynômes comme des objets abstraits, sur lesquels sont définies un certain nombre d'opérations.

Définition 3.13 *Soit $P = \sum_{n=0}^N a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$. On associe à P une fonction polynômiale, notée elle aussi P et définie par :*

$$P : x \in \mathbb{K} \longmapsto P(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n \in \mathbb{K}$$

Propriétés 3.4 Les fonctions polynômiales héritent des propriétés des polynômes que nous avobns déjà vues, grâce aux propriétés suivantes

1. La fonction polynomiale associée à la somme de deux polynômes est égale à la somme des fonctions polynômiales associées aux deux polynômes.
2. La fonction polynomiale associée au produit de deux polynômes est égale au produit des fonctions polynômiales associées aux deux polynômes.

Définition 3.14 *Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $x \to P(x)$ la fonction polynomiale associée. On appelle racine de P tout nombre $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $P(\alpha) = 0$.*

Proposition 3.7 *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. P admet $\alpha \in \mathbb{K}$ comme racine si et seulement si le polynôme $X-\alpha$ divise P.*

Preuve : Effectuons la division euclidienne de P par $X-\alpha$: $P(X) = Q(X)(X-\alpha) + R(X)$, avec $d^\circ(R) \leq 0$. En considérant les fonctions polynômiales associées aux polynômes à droite et à gauche de l'égalité on voit bien $P(\alpha) = R(\alpha)$. Donc $X-\alpha$ divise P si et seulement si $R(\alpha) = 0$, donc si et seulement si α est racine de P, puisque $d^\circ(R) \leq 0$. ♠

Notons que les polynômes $X-\alpha$ et $X-\beta$ sont premier entre eux si et seulement si $\alpha = \beta$. On peut donc en déduire

Corollaire 3.2 — *Un polynôme de degré n a au plus n racines distinctes.*

— *Soit P est un polynôme de degré n. S'il existe $n+1$ éléments de $\mathbb{K}$, deux à deux distincts, qui sont racines de P alors P est le polynôme nul.*

Définition 3.15 *Soient P un polynôme et α une racine de P. La multiplicité de la racine α est le plus grand entier r tel que $(X-\alpha)^r$ divise P. On dit que α est une racine simple si sa multiplicité vaut 1 et multiple si sa multiplicité est supérieure à 1.*

Théorème 3.7 (Théorème d'Alembert-Gauss) *Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$ admet au moins une racine (dans $\mathbb{C}$).*

3.4.2 Dérivation, formules de Leibnitz et de Taylor

On définit maintenant une nouvelle opération sur les polynômes : la dérivation

Définition 3.16 *1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Le polynôme dérivé de P est le polynôme $P' \in \mathbb{K}[X]$ défini par*

$$P'(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n X^{n-1} , \qquad \text{où} \qquad P(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$$

2. Le polynôme dérivé k-ième de $P \in \mathbb{K}[X]$ est le polynôme $P^{(k)} \in \mathbb{K}[X]$ obtenu en dérivant k fois P. Autrement dit,

$$P^{(k)} = P^{(k-1)'}$$

Propriétés 3.5 1. L'application associant à un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ son polynôme dérivé est linéaire : $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$(P + Q)' = P' + Q' \ , \quad (\lambda P)' = \lambda P' \ .$$

2. On a la **formule de Leibnitz** : $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X]$

$$(P.Q)' = P'.Q + P.Q' \ . \tag{3.11}$$

3. Plus généralement, la formule de Leibnitz à l'ordre k s'écrit

$$(P.Q)^{(k)} = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} P^{\ell}.Q^{k-\ell} \ , \tag{3.12}$$

où on a posé par convention $P^{(0)} = P$ et $P^{(1)} = P'$.

Cette dernière propriété se montre par récurrence, en utilisant la propriété de Pascal des coefficients binômiaux. Par exemple, à l'ordre 2, on a

$$(P.Q)^{(2)} = (P.Q' + P'.Q)' = P.Q'' + P'.Q' + P'.Q' + P''.Q = P.Q'' + 2P'.Q' + P''.Q \ .$$

Corollaire 3.3 *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Si P admet des racines multiples alors P et P' ne sont pas premiers entre eux.*

Attention : la réciproque du corollaire est vraie sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$.

Proposition 3.8 (Formule de Taylor) *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré N. On a*

$$P(X) = \sum_{n=0}^{N} P^{(n)}(\alpha) \frac{(X - \alpha)^n}{n!}$$

Preuve : On sait qu'on peut écrire $P(X) = \sum_{n=0}^{N} a_n (X_\alpha)^n$. Il suffit alors d'identifier les a_n en considérant les dérivées successives de P et en les évaluant en α. ♠

Corollaire 3.4 *Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de $P \in \mathbb{K}[X]$. La multiplicité de α est égale à r si et seulement si $P^{(k)}(\alpha) = 0$ pour tout $k < r$ mais $P^{(r)}(\alpha) = 0$. En particulier une racine de P est multiple si et seulement si elle est aussi racine de P' .*

Exemple 3.12 Considérons le polynôme

$$P(X) = (X-1)^3(X+2)\ .$$

-1 est racine triple de P. Calculons maintenant

$$\begin{array}{lclcl} P'(X) & = & 3(X-1)^2(X+2)+(X-1)^3 & = & (X-1)^2(4X+5) \\ P''(X) & = & 2(X-1)(4X+5)+4(X-1)^2 & = & 9(X-1)(X+1) \\ P^{(3)}(X) & = & 9(X+1+X-1) & = & 18X \end{array}$$

on vérifie bien que $P'(1) = P''(1) = 0$, mais $P^{(3)}(1) \neq 0$.