Master Mathématiques et Applications, 1-ière année, Aix-Marseille Université

Modélisation en Traitement du Signal, Fiche d'exercices 1

Année 2015-16

---

1 Approximations constantes par morceaux.

Soit N un entier positif. On considère l'espace $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0^{(N)} \subset L^2([0,1])$ des fonctions définies sur $[0,1]$, constantes sur les intervalles de la forme $[k/N, (k+1)/N[$ où N est un entier positif, et $k = 0, 1, \dots N-1$. Soit γ l'indicatrice de l'intervalle $[0, 1/N]$, et soient γ_k, $k = 0, \dots N-1$ les fonctions définies par

$$\gamma_k(t) = \gamma\left(t - \frac{k}{N}\right) , \qquad k = 0, \dots N-1 .$$

1. Montrer que les fonctions γ_k sont orthogonales deux à deux. Calculer leur norme et en déduire une base orthonormée de $\mathcal{E}_0$.
2. Expliciter les opérateurs d'analyse $U : L^2([0,1]) \to \mathbb{C}^N$ et de synthèse $V : \mathbb{C}^N \to \mathcal{E}_0$ associés, ainsi que la projection orthogonale $\Pi_{\mathcal{E}_0} : L^2([0,1]) \to \mathcal{E}_0$.
3. Soit $x \in \mathcal{E}_0$. Ecrire le développement de x sur la base de $\mathcal{E}_0$.

2 Espaces invariants par translation.

2.1 Translatés d'une fonction de base et espace engendré.

Soit N un entier positif. On considère une fonction $\varphi \in L^2([0,1])$, et on définit ses translatées φ_n par

$$\varphi_n(t) = \varphi\left(\left(t - \frac{n}{N}\right)[\text{mod } 1]\right) , \quad n = 0, \dots N-1 .$$

1. Montrer que la matrice de Gram est une matrice circulante. En d'autres termes, vérifier qu'il existe un vecteur $g = \{g_0, \dots g_{N-1}\}$ tel que
$$G_{mn} = \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = g_{(n-m)[\text{mod } N]}$$
2. On note F_N le sous-espace de $L^2([0,1])$ engendré par les fonctions φ_n, et on suppose que la famille $\{\varphi_0, \dots \varphi_{N-1}\}$ est linéairement indépendante. Expliciter les opérateurs d'analyse $U : L^2([0,1]) \to \mathbb{C}^N$ et de synthèse $V : \mathbb{C}^N \to F_N$ associés, ainsi que la projection orthogonale Π_{F_N} de $L^2([0,1])$ sur F_N (voir le cours).

2.2 Transformation de Fourier finie.

Soit l'endomorphisme $x \in \mathbb{C}^N \to \hat{x} \in \mathbb{C}^N$, appelé *transformation de Fourier finie* (TFF) défini par

$$\hat{x}_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2i\pi kn/N} .$$

1. Montrer que la transformation est multiple d'une isométrie, plus précisément que $\forall x \in \mathbb{C}^N$, $\|\hat{x}\|^2 = N\|x\|^2$. Vérifier que la transformation inverse est donnée comme suit : pour tout $x \in \mathbb{C}^N$,

$$x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k e^{2i\pi kn/N} \ .$$

2. On note X le vecteur colonne formé des composantes x_n de x dans la base canonique. Montrer que la TFF s'écrit matriciellement sous la forme

$$\hat{X} = FX \ , \qquad X = \frac{1}{N}F^*\hat{X} \ ,$$

où $F \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ est une matrice $N \times N$ à coefficients complexes, que l'on explicitera, et où F^* est la matrice adjointe. On a donc $F^{-1} = F^*/N$.

2.3 Inversion de la matrice de Gram.

On va maintenant donner une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité de la matrice de Gram, en la diagonalisant.

1. En utilisant le fait que la matrice de Gram est une matrice circulante, calculer GF et en déduire que G s'écrit sous la forme

$$G = FD(\hat{g})F^{-1} \ ,$$

où $D(\hat{g})$ est la matrice diagonale dont la diagonale est constituée du vecteur $\hat{g} \in \mathbb{C}^N$.

2. Déduire des propriétés de la matrice de Gram que ses valeurs propres sont réelles et positives ou nulles. Déduire des résultats précédents une condition nécessaire et suffisante pour que la famille $\{\varphi_0, \dots \varphi_{N-1}\}$ soit linéairement indépendante (et donc une base du sous-espace de $L^2([0,1])$ qu'elle engendre.

2.4 Approximations affines par morceaux.

On considère l'espace $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1^{(N)}$ des fonctions définies sur $[0,1]$, continues et affines sur les intervalles de la forme $[k/N, (k+1)/N[$ où N est un entier positif, et $k = 0, 1, \dots N-1$.

Soit γ la fonction définie par

$$\gamma(t) = \begin{cases} a\left(\frac{1}{N} - t\right) & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{N} \\ a\left(t - \frac{N-1}{N}\right) & \text{si } \frac{N-1}{N} \le t \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \ ,$$

où a est une constante, et soient γ_k, $k = 0, \dots N-1$ les fonctions définies par

$$\gamma_k(t) = \gamma\left(\left(t - \frac{k}{N}\right) [\text{mod } 1]\right)$$

1. Calculer $\|\gamma\|$, et en déduire la valeur de a assurant que $\|\gamma\| = 1$.
2. Tracer la fonction γ et quelques exemples de fonctions γ_k, par exemple pour $N = 4$ ou $N = 8$.
3. Montrer que $\langle \gamma_k, \gamma_\ell \rangle = 0$ dès que $|k - \ell| > 1$. Vérifier que $\langle \gamma_k, \gamma_{k+1} \rangle = \langle \gamma_k, \gamma_{k-1} \rangle = \langle \gamma, \gamma_1 \rangle$, et calculer cette expression.
   La matrice de Gram $G = \{G_{mn},\ m,n = 0, \dots N-1\}$ formée des produits Hermitiens $G_{mn} = \langle \gamma_n, \gamma_m \rangle$ des fonctions γ_k est donc une matrice circulante
4. En utilisant les résultats ci-dessus, diagonaliser G et montrer qu'elle est inversible. En déduire que la famille $\{\gamma_0, \dots \gamma_{N-1}\}$ est linéairement indépendante, et que c'est une base de $\mathcal{E}_1$.
5. Expliciter les opérateurs d'analyse $U : L^2([0,1]) \to \mathbb{C}^N$ et de synthèse $V : \mathbb{C}^N \to \mathcal{E}_1$ associés, ainsi que la projection orthogonale de $L^2([0,1])$ sur $\mathcal{E}_1$.
6. Dans le même cas de figure, on va maintenant s'intéresser à la caractérisation des fonctions de $\mathcal{E}_1$ par leurs valeurs ponctuelles.
   a) Soit $x \in \mathcal{E}_1$. Exprimer les valeurs ponctuelles de x en fonction des coefficients du développement de x sur la base orthonormée des γ_k.
   b) Peut-on en déduire quoi que ce soit sur la projection orthogonale sur $\mathcal{E}_1$?

Corrections

1 Approximations constantes par morceaux.

Soit N un entier positif. On considère l'espace $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0^{(N)} \subset L^2([0,1])$ des fonctions définies sur $[0,1]$, constantes sur les intervalles de la forme $[k/N,(k+1)/N[$ où N est un entier positif, et $k = 0,1,\dots N-1$. Soit γ l'indicatrice de l'intervalle $[0,1/N]$, et soient γ_k, $k = 0,\dots N-1$ les fonctions définies par

$$\gamma_k(t) = \gamma\left(t - \frac{k}{N}\right) , \qquad k = 0,\dots N-1 .$$

1. γ est l'indicatrice de l'intervalle $I_0 = [0,1/N[$. On montre que γ_k est l'indicatrice de l'intervalle $I_k = [k/N,(k+1)/N[$. Les fonctions γ_k sont à support disjoint, et sont ainsi orthogonales deux à deux :

$$\langle \gamma_k, \gamma_\ell \rangle = \int \gamma_k(t)\overline{\gamma_\ell}(t)\,dt = \int_{I_k\cap I_\ell} dt = \frac{1}{N}\delta_{k\ell}$$

car les intervalles I_k sont de longueur $1/N$.
La norme de γ_k vaut donc $1/\sqrt{N}$ pour tout k, et et posant

$$f_k(t) = \sqrt{N}\gamma_k(t) , \qquad t \in [0,1]$$

la famille $\{f_0,\dots f_{N-1}\}$ est une famille orthonormée, et donc linéairement indépendante.
Par ailleurs, toute fonction $f \in \mathcal{E}_0$ s'écrit sous la forme

$$f(t) = \sum_{k=0} a_k\gamma_k(t) = \sum_{k=0} c_k f_k(t) , \qquad \text{avec} \qquad c_k = a_k\sqrt{N} ,$$

donc la famille $\{f_0,\dots f_{N-1}\}$ est une base orthonormée de $\mathcal{E}_0$.

2. Puisqu'on dispose d'une base orthonormée de $\mathcal{E}_0$, la projection orthogonale $L^2([0,1]) \to \mathcal{E}_0$ s'écrit sous la forme

$$\Pi_{\mathcal{E}_0} : x \in L^2([0,1]) \to \Pi_{\mathcal{E}_0}(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \langle x, f_n\rangle f_n .$$

Le calcul donne

$$\langle x, f_n\rangle = \sqrt{N}\int_{I_n} x(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{N}}X_n ,$$

où on note X_n la valeur moyenne de la fonction x dans l'intervalle I_n (c'est à dire son intégrale sur I_n divisée par la longueur de I_n). On a donc

$$\Pi_{\mathcal{E}_0}(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \langle x, f_n\rangle f_n = \sum_{n=0}^{N-1} X_n\gamma_n .$$

3. Soit $x \in \mathcal{E}_0$. Alors le développement de x sur la base de $\mathcal{E}_0$ s'écrit comme ci-dessus. x étant constante sur chaque intervalle I_n, on a $X_n = x(n/N)$, donc

$$x = \sum_{n=0}^{N-1} X_n\gamma_n = \sum_{n=0}^{N-1} x(n/N)\gamma_n .$$

2 Espaces invariants par translation

2.1 Translatés d'une fonction de base et espace engendré

1. Il suffit de calculer

$$\begin{aligned}
G_{mn} = \langle \varphi_n, \varphi_m\rangle &= \int_0^1 \varphi\left(\left(t - \frac{n}{N}\right)[\text{mod } 1]\right)\overline{\varphi}\left(\left(t - \frac{m}{N}\right)[\text{mod } 1]\right)dt && (1)\\
&= \int_0^1 \varphi(s)\overline{\varphi}\left(\left(s - \frac{m-n}{N}\right)[\text{mod } 1]\right)ds && (2)\\
&= G_{(m-n)[\text{mod } N],0} = g_{(n-m)[\text{mod } N]} && (3)
\end{aligned}$$

2. Si l'on suppose que G est inversible, en posant $H = G^{-1}$, la projection orthogonale s'écrit sous la forme

$$\Pi_{V_N} x = \sum_{n=0}^{N-1} \langle x, \tilde{\varphi}_n \rangle \varphi_n \ ,$$

où

$$\tilde{\varphi}_n = \sum_{m=0}^{N-1} H_{mn} \varphi_m \ .$$

2.2 Transformation de Fourier finie

On rappelle la définition de la transformation de Fourier finie $u \in \mathbb{C}^N \to \hat{u} \in \mathbb{C}^N$:

$$\hat{u}_k = \sum_{n=0}^{N-1} u_n e^{-2i\pi kn/N} \ .$$

1. Calculons
$$\sum_{k=0}^{N-1} \hat{u}_k e^{2i\pi km/N} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u_n e^{-2i\pi k(n-m)/N} = \sum_{n=0}^{N-1} u_n \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2i\pi k(n-m)/N} \ .$$
De l'identité $\sum_{k=0}^{N-1} e^{-2i\pi kp/N} = N\delta_{p,0}$ valable pour tout p entier, on déduit la formule d'inversion de la TFF. Un calcul similaire fournit la propriété de conservation de la norme.
2. En posant
$$F_{kn} = e^{-2i\pi kn/N} \ ,$$
on a bien $\hat{u}_k = \sum_n F_{kn} u_n$, soit $\hat{U} = FU$. L'autre égalité se montre similairement.

2.3 Inversion de la matrice de Gram

1. Calculons GF :
$$(GF)_{mn} = \sum_k G_{mk} F_{kn} = \sum_{k=0}^{N-1} g_{(k-m)[\text{mod } N]} e^{-2i\pi kn/N} = \sum_{\ell=0}^{N-1} g_\ell e^{-2i\pi(\ell+m)n/N} = \hat{g}_n F_{mn} \ .$$
Donc $GF = FD(\hat{g})$ et par conséquent $G = FD(\hat{g})F^{-1}$.
2. Par construction, la matrice de Gram est semi-définie positive et auto-adjointe, ses valeurs propres sont donc réelles et positives ou nulles. Donc $\hat{g}(k) \geq 0$ pour tout k. Une condition nécessaire et suffisante pour que G soit inversible (et donc pour que la famille de fecteurs soit linéairement indépendante) est donc que $\hat{g}_k > 0$ pour tout k.

2.4 Approximations affines par morceaux.

On considère l'espace $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1^{(N)}$ des fonctions définies sur $[0, 1]$, continues et affines sur les intervalles de la forme $[k/N, (k+1)/N[$ où N est un entier positif, et $k = 0, 1, \dots N-1$. Soit γ la fonction définie par

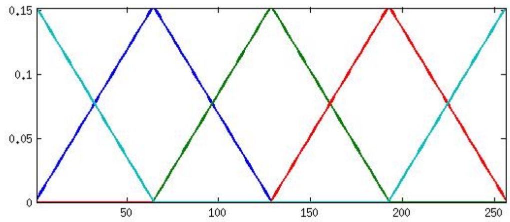
$$\gamma(t) = \begin{cases} a\left(\frac{1}{N} - t\right) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{N} \\ a\left(t - \frac{N-1}{N}\right) & \text{si } \frac{N-1}{N} \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \ ,$$

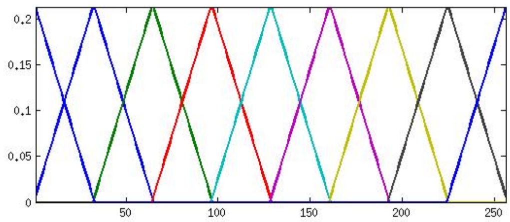
où a est une constante, et soient γ_k, $k = 0, \dots N-1$ les fonctions définies par

$$\gamma_k(t) = \gamma\left(\left(t - \frac{k}{N}\right) [\text{mod } 1]\right)$$

1. Pour simplifier on suppose la constante a réelle (si elle est complexe, seul $|a|$ pourra être déterminé par la condition de normalisation).
$$\|\gamma\|^2 = a^2 \int_0^{1/N} \left(\frac{1}{N} - t\right)^2 dt + a^2 \int_{1-1/N}^1 \left(t - \frac{N-1}{N}\right)^2 dt = 2a^2 \int_0^{1/N} u^2 dt = \frac{2a^2}{3N^3} \ .$$
Donc la valeur de a assurant que $\|\gamma\| = 1$ est
$$a = \sqrt{\frac{3N^3}{2}} \ .$$

2. Des exemples des fonctions γ_k pour $N = 4$ et $N = 8$ se trouvent ci-dessous.





3. De façon générale, une fonction de la forme $u(t-\tau)$ est une copie de la fonction u translatée de τ. Les fonctions considérées ici sont à dupport dans $[0,1]$, les translations sont donc considérées modulo 1 : ce qui sort de $[0,1]$ par la droite revient par la gauche, et vice-versa.
   γ_n est une copie translatée de k/N (modulo 1) de γ, dont le support est de longueur $2/N$. On a donc pour $n \neq 0$
   $$\mathrm{Supp}(\gamma_n) = \left[\frac{n-1}{N}, \frac{n+1}{N}\right] \ ,$$
   d'où $\langle \gamma_k, \gamma_\ell \rangle = 0$ dès que $|k-\ell| > 1$ (modulo N).
   D'après les résultats précédents, la matrice de Gram est circulante, donc pour tout k, $\langle \gamma_k, \gamma_{k+1} \rangle = \langle \gamma, \gamma_1 \rangle$. De plus, elle est auto-adjointe et réelle, donc symétrique, d'où $\langle \gamma_k, \gamma_{k-1} \rangle = \langle \gamma_{k-1}, \gamma_k \rangle = \langle \gamma, \gamma_1 \rangle$.
   Calculons maintenant
   $$\langle \gamma, \gamma_1 \rangle = a^2 \int_0^{1/N} t \left(\frac{1}{N} - t\right) dt = \frac{a^2}{6N^3} = \frac{1}{4} \ .$$
   La matrice de Gram $G = \{G_{mn},\ m,n = 0,\dots N-1\}$ est donc une matrice circulante de la forme
   $$G = \begin{pmatrix} 1 & \frac14 & 0 & 0 & \dots & \frac14 \\ \frac14 & 1 & \frac14 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac14 & 1 & \frac14 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \frac14 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac14 \end{pmatrix}$$
4. G est circulante, elle est donc diagonalisée par la transformation de Fourier finie. La matrice diagonale correspondante a sur sa diagonale le vecteur $\hat{g}$, où g est défini par $g_n = G_{0n}$. Il suffit donc de calculer $\hat{g}$, et de montrer que toutes ses composantes sont non-nulles (elles sont en fait strictement positives). En effet
   $$\hat{g}_k = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{2i\pi k/N} + e^{2i\pi k(N-1)/N}\right) = 1 + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \ .$$
   Ainsi,
   $$\frac{1}{2} \leq \hat{g}_k \leq \frac{3}{2} \ , \qquad \forall k = 0,\dots N-1 \ .$$
5. La projection orthogonale $\Pi_{\mathcal{E}_1}$ s'écrit
   $$\Pi_{\mathcal{E}_1} x(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \langle x, \tilde{\gamma}_n \rangle \gamma_n \ ,$$
   où
   $$\tilde{\gamma}_n = G^{-1}\gamma_n \ .$$
6. Dans le même cas de figure, on va maintenant s'intéresser à la caractérisation des fonctions de $\mathcal{E}_1$ par leurs valeurs ponctuelles.
   a) Soit $x \in \mathcal{E}_1$. On a
   $$x(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \langle x, \tilde{\gamma}_n \rangle \gamma_n(t) \ ,$$
   on a donc aussi pour tout $k = 0,\dots N-1$
   $$x(k/N) = \sum_{n=0}^{N-1} \langle x, \tilde{\gamma}_n \rangle \gamma_n(k/N) \ .$$
   Or, $\gamma_n(k/N) = a\delta_{kn}$, on peut donc en déduire aussi
   $$\langle x, \tilde{\gamma}_n \rangle = \sqrt{\frac{3N^3}{2}}\, x\left(\frac{n}{N}\right)$$
   b) Ceci est vrai quand $x \in \mathcal{E}_1$, mais n'est plus vrai pour un $x \in L^2([0,1])$ quelconque.