Master Mathématiques et Applications, 1-ière année, Aix-Marseille Université

Modélisation en Traitement du Signal, Fiche d'exercices 2

Année 2015-16

---

1 Etude d'un quantificateur uniforme

On considère un quantificateur uniforme $Q : I = [a, b] \to \{y_0, \dots y_{M-1}\}$ sur $M = 2^R$ niveaux, défini de la façon suivante :

$$x_0 = a \ , \quad x_k = x_0 + k\Delta \quad \text{avec} \quad \Delta = \frac{b-a}{M} \ , \qquad \text{et} \qquad Q(x) = y_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \quad \text{si} \quad x_k \le x < x_{k+1} \ .$$

Soit X une variable aléatoire continue, de densité ρ_X telle que $\mathsf{Supp}(\rho_X) \subset [a, b]$. On note $Y = Q(X)$ et $Z = X - Y$ les variables aléatoires décrivant respectivement la variable quantifiée et l'erreur de quantification.

1. Y est-elle une variable aléatoire discrète ou continue ? exprimer sa distribution de probabilités en fonction de ρ_X et des paramètres définissant le quantificateur.
2. Montrer que Z est une variable aléatoire continue. Caractériser sa distribution de probabilités.
3. Traiter l'exemple d'une distribution uniforme, c'est à dire le cas $\rho_X = 1_{[a,b]}/(b-a)$.

2 Quantification d'une variable aléatoire Laplacienne

On considère une variable aléatoire X Laplacienne de paramètre λ, c'est à dire dont la densité de probabilité est de la forme (notons qu'il s'agit d'une fonction paire)

$$\rho(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} \ .$$

On veut quantifier cette variable aléatoire sur $R = R' + 1$ bits (ou R' est en entier positif), soit $M = 2M' = 2^R$, de la façon suivante. Soit $\Delta \in \mathbb{R}^+$, on pose

$$x_k = k\Delta \ , \qquad k = 0, \dots M' - 1 \ ,$$

et on associe à tout réel x le nombre $Q(x) \in \{-y_+, -y_{M'-2}, \dots - y_0, y_0, \dots y_{M'-2}, y_+\}$ défini par

$$Q(x) = \begin{cases} \text{signe}(x) y_k & \text{si} \quad |x| \in [x_k, x_{k+1}[\ , \quad k = 0, \dots M' - 2 \\ \text{signe}(x) y_+ & \text{si} \quad |x| \ge x_{M'-1} \ . \end{cases}$$

On veut évaluer les bruits de quantification et de saturation associés, ainsi que le rapport signal à bruit.

1. Représenter Q graphiquement, vérifier qu'il correspond bien à M niveaux de quantification.
2. On considère tout d'abord une densité ρ quelconque, paire. Montrer que si les niveaux de quantification y_k sont choisis de sorte que

$$y_k = \frac{\int_{x_k}^{x_{k+1}} x\rho(x)\,dx}{\int_{x_k}^{x_{k+1}} \rho(x)\,dx} \ , \qquad y_+ = \frac{\int_{x_{M'-1}}^{\infty} x\rho(x)\,dx}{\int_{x_{M'-1}}^{\infty} \rho(x)\,dx}$$

   le quantificateur est *non biaisé*, c'est à dire tel que $B := \mathbb{E}\{X - Q(X)\} = 0$. Calculer les valeurs correspondantes pour le cas de la loi Laplacienne. Il sera utile d'introduire la constante $\gamma = \lambda\Delta$, et de pré-calculer des intégrales du type $\int_a^b e^{-\lambda x} dx$, $\int_a^b x e^{-\lambda x} dx$ et $\int_a^b x^2 e^{-\lambda x} dx$.

3. Exprimer la distorsion
$$D := \mathbb{E}\left\{(X - Q(X))^2\right\}$$
en fonction de la densité ρ des bornes x_k et des niveaux de quantification y_k et y_+. Expliciter cette quantité dans le cas de la loi Laplacienne... ou vérifier qu'elle peut être calculée explicitement.
4. Comment choisiriez vous le paramètre Δ optimal ?
5. La loi Laplacienne a l'intérêt de conduire à des calculs explicites. Est-ce toujours le cas pour une variable aléatoire Gaussienne ? on donne la densité de probabilités d'une variable aléatoire Gaussienne centrée, de variance σ^2 :
$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2} \ .$$

3 Modulation par déplacement d'amplitude

On considère le dispositif appelé *modulateur par déplacement d'amplitude* (ou ASK) défini comme suit. Soit $\tau \in \mathbb{R}^+$, et soit φ la forme d'onde $\varphi(t) = \sqrt{2/\tau}\sin(2\pi f_0 t/\tau)1_{[0,\tau]}(t)$ où f_0 est un entier positif appelé fréquence porteuse. Soit v un réel positif (v pour *voltage*, qui va mesurer l'amplitude du signal émis), soit $s : \{0,1\} \to \mathbb{R}$ définie par $s(0) = -v$ et $s(1) = v$. Etant donnée une suite binaire $b_1 \dots b_K$, le modulateur lui associe la quantité
$$x(t) = M(b_1 \dots b_K) = \sum_{k=1}^{K} s(b_k)\varphi_k(t) \ , \quad \text{où} \quad \varphi_k(t) = \varphi(t - k\tau) \ .$$
On se propose d'étudier les performances d'un tel modulateur.

1. **Modulation :** on modélise les bits $b_1, ...b_K$ comme K réalisations i.i.d. d'une variable aléatoire de Bernoulli $B \sim \mathcal{B}(p)$ prenant les valeurs 0 et 1 avec probabilités p et $1-p$ respectivement.
   a) Vérifier que $\varphi_k \in L^2([0, K\tau])$ pour tout $k = 1, \dots K$, et que $\langle\varphi_k, \varphi_\ell\rangle = \delta_{k\ell}$ pour tous $k, \ell = 1, \dots K$.
   b) Calculer la puissance du signal modulé $P = \frac{1}{K\tau}\mathbb{E}\left\{\int_0^{K\tau} |x(t)|^2 dt\right\}$ en fonction du voltage v.
2. **Démodulation :** on suppose que le canal de transmission n'introduit pas de distorsion autre qu'un bruit additif $\epsilon(t)$, le signal reçu après transmission est donc de la forme $y(t) = x(t) + \epsilon(t)$, et le démodulateur calcule les coefficients $\alpha_k = \langle y, \varphi_k\rangle$. Vérifier que α_k est de la forme
$$\alpha_k = s(b_k) + \epsilon_k \ , \quad k = 1, \dots K \ .$$
où ϵ_k est la contribution du bruit. On modélise cette dernière sous la forme de réalisations i.i.d. ϵ_k d'une variable aléatoire normale $E \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, où la variance σ^2 traduit l'importance du bruit.
   a) Montrer que les coefficients α_k sont des réalisations i.i.d. d'une variable aléatoire $Y = B + E$, où E représente le bruit, et montrer que la loi de Y est une loi de mélange de Gaussiennes, dont on précisera les caractéristiques. On pourra calculer la fonction de répartition de Y et vérifier qu'il s'agit d'une variable aléatoire à densité.
   b) Le problème du démodulateur est de retrouver les bits b_k à partir des coefficients α_k. On modélise la décision par une variable aléatoire B' définie par
$$B' = 0 \text{ si } Y < \tau \ , \quad \text{et} \quad B' = 1 \text{ si } Y \geq \tau \ .$$
   Donner une expression de la probabilité d'erreur $\mathbb{P}\{B' \neq B\}$, et donner la valeur de τ qui rend cette probabilité minimale.
   c) On suppose maintenant que $p = 1/2$. Exprimer la valeur optimale de la probabilité d'erreur. On donne les fonctions
$$\mathsf{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt \ , \qquad \mathsf{erfc}(x) = 1 - \mathsf{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\,dt \ .$$
   Vérifier que cette probabilité est une fonction décroissante de v, vérifier aussi que la décroissance de cette probabilité se fait au détriment de la puissance.

Corrections

1 Etude d'un quantificateur uniforme

On considère un quantificateur uniforme $Q : I = [a,b] \to \{y_0, \dots y_{M-1}\}$ sur $M = 2^R$ niveaux, défini de la façon suivante :

$$x_0 = a \ , \quad x_k = x_0 + k\Delta \quad \text{avec} \quad \Delta = \frac{b-a}{M} \ , \qquad \text{et} \qquad Q(x) = y_k \quad \text{si} \quad x_k \leq x < x_{k+1} \ .$$

Soit X une variable aléatoire continue, de densité ρ_X telle qua $\mathsf{Supp}(\rho_X) \subset [a,b]$. On note $Y = Q(x)$ et $Z = X - Y$ respectivement la variables aléatoire quantifiée et la variable aléatoire décrivant l'erreur de quantification.

1. Y est évidemment une variable aléatoire discrète (qui prend un nombre fini de valeurs). Sa distribution de probabilités est donnée par
$$p_k = \mathbb{P}\{Y = y_k\} = \int_{a+k\Delta}^{a+(k+1)\Delta} \rho_X(x)\, dx \ .$$

2. Z est une variable aléatoire continue, en effet pour tout $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $Q(x) = y_k$, on a
$$-\frac{\Delta}{2} = x_k - \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \leq x - Q(x) \leq x_{k+1} - \frac{x_k + x_{k+1}}{2} = \frac{\Delta}{2} \ ,$$
et $x - Q(x)$ peut prendre toutes les valeurs possibles dans cet intervalle.
Calculons la fonction de répartition $F_Z(u) = \mathbb{P}\{Z \leq u\}$ de Z. Clairement, $F_Z(u) = 0$ pour tout $u \leq -\Delta/2$ et $F_Z(u) = 1$ pour tout $u \geq \Delta/2$. Soit maintenant $u \in [-\Delta/2, \Delta/2]$
$$\begin{aligned}
F_Z(u) &= \sum_{k=0}^{M-1} \mathbb{P}\{Z \leq u | x_k \leq X < x_{k+1}\}\mathbb{P}\{x_k \leq X < x_{k+1}\} \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} \mathbb{P}\{X \leq u + y_k | x_k \leq X < x_{k+1}\}\mathbb{P}\{x_k \leq X < x_{k+1}\} \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} \mathbb{P}\{X \leq u + y_k \text{ et } x_k \leq X < x_{k+1}\} \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} \mathbb{P}\{x_k \leq X \leq u + y_k\} \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} \int_{x_k}^{y_k+u} \rho_X(x) dx
\end{aligned}$$
Par conséquent, Z admet une densité égale presque partout à la dérivée de la fonction de répartition
$$\rho_Z(u) = \sum_{k=0}^{M-1} \rho_X(y_k + u) \text{ pour } u \in [-\Delta/2, \Delta/2] \quad \text{et} \quad \rho_Z(u) = 0 \text{ sinon} \ .$$

3. Considérons l'exemple d'une distribution uniforme, c'est à dire le cas
$$\rho_X = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}$$
Alors pour $u \in [-\Delta/2, \Delta/2]$
$$\rho_Z(u) = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{b-a} = \frac{M}{b-a} = \frac{1}{\Delta} \ .$$
Donc Z est uniformément distribuée sur $[-\Delta/2, \Delta/2]$.

2 Quantification d'une variable aléatoire Laplacienne

1. Sur $\mathbb{R}^+$, il y a $M'-1$ intervalles bornés de la forme $[x_k, x_{k+1}[$ auxquels il faut ajouter le dernier domaine $[x_{M'-1}, \infty[$, ce qui fait M' valeurs quantifiées. Au total il y a donc M valeurs de quantification.
2. Compte tenu des hypothèses de symétrie (parité de ρ et symétrie des intervalles de quantification, le biais s'écrit
$$B = 2\left(\sum_{k=0}^{M'-2}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}}(x-y_k)\rho(x)dx\right) + \int_{x_{M'-1}}^{\infty}(x-y_+)\rho(x)dx\right) .$$
Pour que B soit nul il suffit (sans que ça ne soit une condition nécessaire) que chacun des termes soit nul, ce qui correspond par exemple à
$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}(x-y_k)\rho(x)dx \quad\Longleftrightarrow\quad y_k\int_{x_k}^{x_{k+1}}\rho(x)dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}}x\rho(x)dx$$
pour tout k, qui conduit à la condition désirée, à condition que ρ ne soit pas nulle sur l'intervalle considéré, ce qui est vrai pour la densité Laplacienne.
Il faut calculer des intégrales du type
$$\int_a^b e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a}^{\lambda b}e^{-u}du = \frac{1}{\lambda}\left(e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}\right) ,$$
et
$$\int_a^b xe^{-\lambda x}dx = -\frac{d}{d\lambda}\int_a^b e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda^2}\left(e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}\right)+\frac{1}{\lambda}\left(ae^{-\lambda a}-be^{-\lambda b}\right) = \frac{1}{\lambda^2}\left[(\lambda a+1)e^{-\lambda a}-(\lambda b+1)e^{-\lambda b}\right] .$$
On en déduit
$$y_k = \frac{1}{\lambda}\frac{(k\gamma+1)e^{-k\gamma}-((k+1)\gamma+1)e^{-(k+1)\gamma}}{e^{-k\gamma}-e^{-(k+1)\gamma}} = \frac{1}{\lambda}\frac{(k\gamma+1)-((k+1)\gamma+1)e^{-\gamma}}{1-e^{-\gamma}}$$
3. La distorsion s'écrit
$$D = 2\left(\sum_{k=0}^{M'-2}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}}(x-y_k)^2\rho(x)dx\right) + \int_{x_{M'-1}}^{\infty}(x-y_+)^2\rho(x)dx\right) ,$$
et il faut donc calculer des intégrales de la forme
$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}(x-y_k)^2e^{-\lambda x}dx = e^{-\lambda y_k}\int_{a_k}^{b_k}u^2e^{-\lambda u}du$$
où on a posé $a_k = x_k - y_k$ et $b_k = x_{k+1}-y_k$. Calculons donc
$$\begin{aligned}\int_a^b x^2e^{-\lambda x}dx &= -\frac{d}{d\lambda}\frac{1}{\lambda^2}\left[(\lambda a+1)e^{-\lambda a}-(\lambda b+1)e^{-\lambda b}\right]\\ &= \frac{2}{\lambda^3}\left[(\lambda a+1)e^{-\lambda a}-(\lambda b+1)e^{-\lambda b}\right]+\frac{1}{\lambda^2}\left(\lambda a^2e^{-\lambda a}-\lambda b^2e^{-\lambda b}\right)\\ &= \frac{1}{\lambda^3}\left[(\lambda^2a^2+2\lambda a+2)e^{-\lambda a}-(\lambda^2b^2+2\lambda b+2)e^{-\lambda b}\right] .\end{aligned}$$
Par conséquent, on a
$$\begin{aligned}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(x-y_k)^2e^{-\lambda x}dx &= \frac{1}{\lambda^3}\left[(\lambda^2(x_k-y_k)^2+2\lambda(x_k-y_k)+2)e^{-\lambda x_k}-(\lambda^2(x_{k+1}-y_k)^2+2\lambda(x_{k+1}-y_k)+2)e^{-\lambda x_{k+1}}\right]\\ &= \frac{1}{\lambda^3}e^{-k\gamma}\left[(\lambda^2(x_k-y_k)^2+2\lambda(x_k-y_k)+2)-(\lambda^2(x_{k+1}-y_k)^2+2\lambda(x_{k+1}-y_k)+2)e^{-\gamma}\right]\end{aligned}$$
4. Le seul paramètre libre de ce quantificateur est le pas Δ, ou de façon équivalente la constante $\gamma = \Delta\lambda$. La valeur optimale sera obtenue en minimisant la distorsion par rapport à γ.
5. Dans le cas de la densité Gaussienne les intégrales de la forme
$$\int_a^b x^ke^{-x^2/2}dx$$
ne sont plus calculables explicitement, et s'expriment en termes de la *fonction d'erreur*
$$\mathsf{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$
qui est une fonction transcendante.

3 Modulation par déplacement d'amplitude

On considère le modulateur très simple défini comme suit. Soit $\tau \in \mathbb{R}^+$, et soit φ la forme d'onde $\varphi(t) = \sqrt{2/\tau}\sin(2\pi f_0 t/\tau)1_{[0,\tau]}(t)$ où f_0 est un entier positif appelé fréquence porteuse. Soit v un réel positif, soit $s : \{0,1\} \to \mathbb{R}$ définie par $s(0) = -v$ et $s(1) = v$. Etant donnée une suite binaire $b_1 \dots b_K$, le modulateur lui associe la quantité

$$x(t) = M(b_1 \dots b_K) = \sum_{k=1}^{K} s(b_k)\varphi_k(t) \ , \quad \text{où} \quad \varphi_k(t) = \varphi(t - k\tau) \ .$$

On se propose d'étudier les performances d'un tel modulateur.

1. **Modulation :** on modélise les bits $b_1, \dots b_K$ comme K réalisations i.i.d. d'une variable aléatoire de Bernoulli $B \sim \mathcal{B}(1/2)$ prenant les valeurs 0 et 1 avec probabilités égales.
   a) Calculons

   $$\int_0^{K\tau} |\varphi_k(t)|^2 dt = \frac{2}{\tau}\int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \sin(2\pi f_0(t-\tau)/\tau)^2 dt = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} \sin(2\pi f_0 t/\tau)^2 dt = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} [1 - \cos(4\pi f_0 t/\tau)]\, dt = 1 \ .$$

   Par ailleurs, on voit facilement que si $k \neq \ell$, les supports de φ_k et φ_ℓ sont disjoints, d'où $\langle \varphi_k, \varphi_\ell \rangle = 0$.

   b) Compte tenu de l'orthogonalité des fonctions φ_k, on voit facilement que

   $$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{K} s(b_k)^2 \|\varphi_k\|^2 = Kv^2 \ ,$$

   d'où

   $$P = \frac{v^2}{\tau} \ .$$

2. **Démodulation :** l'orthonormalité des fonctions φ_k donne directement

   $$\alpha_k = \langle x, \varphi_k \rangle = s(b_k) + \epsilon_k \ , \quad \text{où} \quad \epsilon_k = \langle \epsilon, \varphi_k \rangle \ .$$

   On modélise la contribution du bruit sous la forme de coefficients ϵ_k aléatoires, i.i.d. suivant une loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

   a) α_k est une réalisation de Y, somme de deux variables aléatoires indépendantes $S \sim \mathcal{B}(p)$ prenant les valeurs $-v$ ou v, et $E \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, et les α_k sont iid. Calculons la fonction de répartition de Y :

   $$\mathbb{P}\{Y \leq y\} = p\,\mathbb{P}\{Y \leq y | S = v\} + (1-p)\,\mathbb{P}\{Y \leq y | S = -v\} \ ,$$

   et les deux lois conditionnelles étant des lois gaussiennes on en déduit la densité de Y

   $$\rho_Y(y) = \frac{p}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(y+v)^2/2\sigma^2} + \frac{1-p}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(y-v)^2/2\sigma^2} \ ,$$

   il s'agit bien d'une loi de mélange de gaussiennes.

   b) La décision est prise à partir d'une valeur seuil τ, la décision est une variable aléatoire B' définie par $B' = 0$ si $Y < \tau$ et $B' = 1$ si $Y \geq \tau$. La probabilité d'erreur est donnée par

   $$\begin{aligned} \mathbb{P}\{B' \neq B\} &= p\,\mathbb{P}\{Y \geq \tau | B = 0\} + (1-p)\,\mathbb{P}\{Y < \tau | B = 1\} \\ &= \frac{p}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\tau}^{\infty} e^{-(y+v)^2/2\sigma^2}\, dy + \frac{1-p}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\tau} e^{-(y-v)^2/2\sigma^2}\, dy \end{aligned}$$

   La valeur optimale du seuil est obtenue en minimisant la probabilité d'erreur. En égalant à zéro la dérivée de celle-ci par rapport au seuil, on obtient

   $$p\, e^{-(\tau+v)^2/2\sigma^2} = (1-p)\, e^{-(\tau-v)^2/2\sigma^2} \ ,$$

   de sorte que la valeur optimale est obtenue pour

   $$\tau_{\mathsf{opt}} = \frac{\sigma^2}{v} \ln\left(\frac{p}{1-p}\right)$$

c) Dans le cas considéré, $\tau_{\mathsf{opt}} = 0$, on a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{B' \neq B\} &= \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-(y+v)^2/2\sigma^2}\,dy + \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-(y-v)^2/2\sigma^2}\,dy \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-(y+v)^2/2\sigma^2}\,dy \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{v/\sigma^2}^\infty e^{-z^2}\,dz \\
&= \mathsf{erfc}\left(\frac{v}{\sigma^2}\right)
\end{aligned}$$